

C'è la misura interna in Carathéodory?

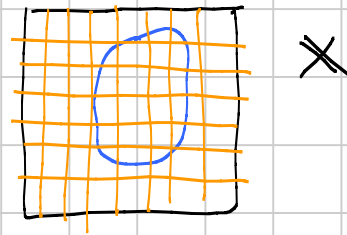
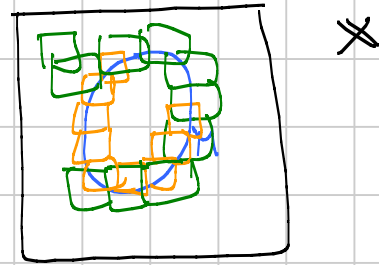
Pensiamo $\mu(X) < +\infty$ e pensiamo μ ottenuta con il metodo I.

$$\mu(X) = \mu(M) + \mu(X \setminus M) \quad (\text{caso speciale } A = X)$$

↓
misura
esterna di M

$$\mu(X) - \mu(X \setminus M) = \text{specie di}$$

misura interna di M



Esercizio Fare vedere che, anche se $\mu(X) < +\infty$, non basta imporre

$$\mu(X) = \mu(M) + \mu(X \setminus M)$$

per ottenere una σ -algebra su cui μ è σ -additiva.

Domanda $X, \mathcal{R}, m$ come nel metodo 10. Costruisco μ ed m . Qualcosa garantisce che

(1) $\mu(R) = m(R)$ per ogni $R \in \mathcal{R}$

(2) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}$.

La risposta è sì se siamo nelle ipotesi di HAHN-KOLMOGOROV

Ipotesi : (i) $\mathcal{R}$ è un'algebra (chiusa per complementare ed unione finita)

(ii) $m: \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$ è una pre-misura, cioè numerabilmente additiva su $\mathcal{R}$, cioè se $R_n \in \mathcal{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \in \mathcal{R}$$

$$R_i \cap R_j = \emptyset \text{ per } i \neq j.$$

$$\text{allora } m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(R_n)$$

Oss. Si applica a Lebesgue usando come $\mathcal{R}$ l'algebra generata dagli intervalli, cioè $\mathcal{R}$ contiene le unioni finite di intervalli e i loro complementari e m è quello che ci aspettiamo sulle unioni finite e $+\infty$ sui complementari

— o — o —

ESEMPIO DI VITALI

Esempio di insieme non misurabile secondo Lebesgue.

Oss. La misura di Lebesgue è invariante per traslazioni (basta traslare i ricoprimenti del metodo 1°)

Considero $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, cioè metto su $\mathbb{R}$ la relazione di equiv. $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ e quoziento.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $y \in [0, 1]$ t.c. $x \sim y$. (ne esistono tantissimi)

Grazie all'assioma di scelta ottengo un insieme $V \subseteq [0, 1]$ che contiene un elemento per ogni classe di equivalenza.

Dico che V non è misurabile. Sento due osservazioni

- Numero i razionali $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ e pongo

$$V_n := V + q_n. \text{ Allora } R = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \text{ disgiunta}$$

e quindi se fosse misurabile

$$\mu(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(V_n)}_{\substack{\text{hanno tutti la stessa misura,} \\ \text{e questa è } \neq 0.}} \quad \text{+ "}\infty\text{"}$$

- Numero i razionali $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ in $[0, 1]$ e pongo

$$V_n := V + r_n. \text{ Allora } \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq [0, 2] \text{ e quindi}$$

$$2 \geq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(V_n)}_{\substack{\uparrow \text{ sono } = 2 \neq 0, \text{ quindi} \\ \text{la serie è } +\infty.}} \quad \substack{\uparrow \\ \text{sono} \\ \text{disgiunti}}$$

— 0 — 0 —

FUNZIONI MISURABILI Sia (X, m, μ) uno spazio di misura
Sia

$$f: X \rightarrow [-\infty, +\infty] \quad (\text{estremi compresi})$$

Si dice che f è misurabile se

$$\{x \in X : f(x) < \lambda\} \in m \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Proposizione Nello stesso setting della def. sono fatti equiv.

$$\begin{array}{ll} \{x \in X: f(x) < \lambda\} \in \mathcal{M} & \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \leq \lambda & \text{"} \\ > \lambda & \text{"} \\ \geq \lambda & \text{"} \end{array}$$

$$\{x \in X: f(x) \in A\} \in \mathcal{M} \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Dim. $\{x \in X: f(x) \geq \lambda\} = \{x \in X: f(x) < \lambda\}^c$

$$\{x \in X: f(x) > \lambda\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X: f(x) \geq \lambda + \frac{1}{n}\}$$

Le controimmagini degli intervalli stanno in $\mathcal{M}$ e facilmente si arriva ai Boreliani.

— o — o —

Proprietà dell'insieme delle funzioni misurabili

- (1) f misurabile $\Rightarrow |f|$ misurabile
- (2) f misurabile, c costante $\Rightarrow cf$ misurabile
- (3) se non ci sono problemi di $\pm\infty$, la somma di 2 misurabili è misurabile

$$\{x \in X: f(x) + g(x) > \lambda\} = \bigcup_{\substack{a+b>\lambda \\ (a,b) \in \mathbb{Q}^2}} \{x \in X: f(x) > a, g(x) > b\}$$

$\uparrow$
 $\mathcal{M}$

- (4) analogo per il prodotto (anche via quadrato)
 $(f+g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg$

PROPRIETÀ IMPORTANTI

- ① Se $f_n(x)$ è una successione crescente di funzioni misur., cioè $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ per ogni $x \in X$ e ogni $n \in \mathbb{N}$,

allora $f_\infty(x) := \sup_{(lim)} \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ è misurabile

Dim. $\{x \in X : f_\infty(x) > \lambda\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : f_n(x) > \lambda\}$
vera perché c'è il $> \lambda$

La crescenza serve per avere $\sup$

② Se f_n è una succ. qualunque di funz. mis., allora

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

sono funzioni misurabili

Dim. $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ \inf_{k \geq n} f_k(x) \right\}}_{\text{misurabile come prima}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{misurabile come prima}}$

③ Il limite puntuale di funzioni misurabili è misurabile (se esiste)

Dim. Coincide con il $\liminf$.