

Riassunto puntata prec. (via alta alla misura di Lebesgue)

- Definisco m sull'insieme $\mathcal{R}$ degli intervalli (in $\mathbb{R}$ oppure dei prodotti di intervalli se sono in $\mathbb{R}^n$)
- Estendo m a tutte $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ con il metodo I. Otengo una misura esterna

$$\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty]$$

$$\mu(A) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k, R_k \in \mathcal{R} \right\}$$

- Restringo μ ad una σ -algebra $\mathcal{M}$ definita alla Carathéodory

$$\mathcal{M} = \{ M \subseteq \mathbb{R} : \mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \}$$

- Si ottiene che $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura nel senso della Def 1, cioè numerabilmente additiva sui disgiunti

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(M_k)$$

per ogni $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ con $M_i \cap M_j = \emptyset$ se $i \neq j$.

Da questa seguirà il passaggio al limite di μ sulle succ. crescenti o decrescenti di insiemi

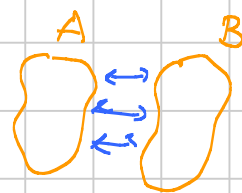
succ. cresc. di insiemi $\leadsto$ teo. di Beppo Levi

succ. decresc. di insiemi con $\mu(M_1) < +\infty \leadsto$ teo. di
conv. dominata.

Domanda: m è abbastanza ricco?

Def. Sia (X, d) metrico. Dico che due sottoinsiemi $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$ sono DISTANTI se

$$\inf \{ d(a, b) : a \in A, b \in B \} > 0$$



Dico che una misura esterna $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ è additiva sui distanti se

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \text{ distanti}$$

Def. Sia (X, d) metrico. Si indica con $\mathcal{B}(X)$ la sigma algebra generata dagli aperti (o dai chiusi, o dalla topologia). Gli elementi di $\mathcal{B}(X)$ si dicono boreliani.

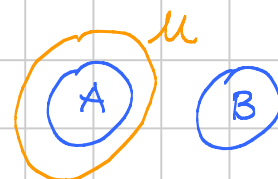
Esercizio Quanti sono i boreliani in $\mathbb{R}$? o in $\mathbb{R}^n$?

Teorema Sia (X, d) metrico e sia $\mu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna. Sia $\mathcal{m}$ la σ -algebra alla Carath. Allora

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{m} \iff \mu \text{ è additiva sui distanti.}$$

Dim. $\Rightarrow$ Facile. Siano A e B distanti. Allora esiste un aperto U tale che $A \subseteq U$ e $U \cap B = \emptyset$.
(Prendo $\delta_0 > 0$ la distanza, cioè l'inf., e considero

$$U := \bigcup_{a \in A} B_{\frac{\delta_0}{2}}(a)$$



$$\begin{aligned} \text{Allora } \mu(A \cup B) &= \mu((A \cup B) \cap U) + \mu((A \cup B) \cap U^c) \\ &\stackrel{\mu \in \mathcal{m}}{=} \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

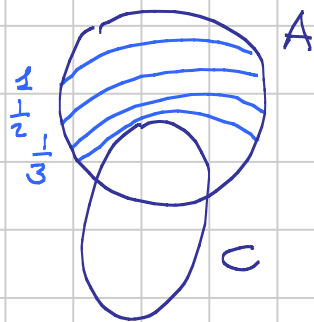
⇐ Basta dir. che tutti i chiusi sono misurabili.

Sia $C \subseteq X$ un chiuso e sia $A \subseteq X$ qualunque. Voglio che

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C)$$

posso assumere $\in \mathbb{R}$

Definisco, per ogni $i \geq 1$ intero



$$A_i := \{x \in A : \frac{1}{i+1} \leq \text{dist}(x, C) < \frac{1}{i}\}$$

$$L_i := \{x \in A : \text{dist}(x, C) \geq \frac{1}{i}\} \quad \text{"lontani"}$$

$$V_i := \{x \in A : 0 < \text{dist}(x, C) < \frac{1}{i}\} \quad \text{"vicini"}$$

Allora $V_i = \bigcup_{k=i}^{+\infty} A_k$ e

$$A \setminus C = L_i \cup V_i$$

↑
qui sto usando che C è chiuso
quindi se $x \notin C$, allora
 $\text{dist}(x, C) > 0$

Step 1 Dico che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < +\infty$$

$A_1, A_3, A_5, \dots$ sono a 2 a 2 distanti, quindi

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_{2i-1}\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_{2i-1}) \quad (\text{facile inclusione})$$

$$\text{quindi} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{2i-1}) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2i-1}\right) \leq \mu(A) < +\infty$$

Analogamente sui pari

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_{2i}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_{2i}\right) \leq \mu(A) \quad \text{per ogni } n$$

da cui la tesi

Step 2 Conclusione

$$\mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C) = \mu(A \cap C) + \mu(L_i \cup V_i)$$

$$(\text{sub-addol.}) \leq \mu(A \cap C) + \mu(L_i) + \mu(V_i)$$

$A \cap C$ e L_i sono distanti $= \mu((A \cap C) \cup L_i) + \mu(V_i)$

$$(A \cap C) \cup L_i \subseteq A \leq \mu(A) + \mu(V_i)$$

$$(\text{sub-add. numer.}) \leq \mu(A) + \sum_{k=i}^{\infty} \mu(A_k)$$

quindi per ogni $i \geq 1$ vale

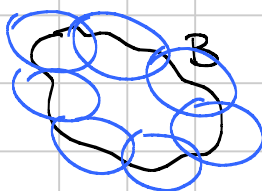
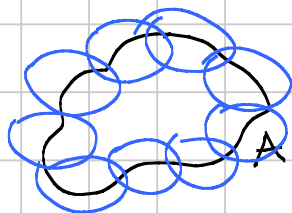
$$\mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C) \leq \mu(A) + \underbrace{\sum_{k=i}^{\infty} \mu(A_k)}_{\downarrow 0 \text{ per } i \rightarrow \infty \text{ perché coda di serie convergente}}$$

— 0 — 0 —

Oss. Tutte le misure esterne ottenute con il metodo 20 sono additive sui distanti

$$\mu(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mu_{\delta}(A) \quad \text{con}$$

$$\mu_{\delta}(A) := \sup \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} m(R_k) : \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k \supseteq A, R_k \in \mathcal{R}, \text{diam}(R_k) \leq \delta \right\}$$



Facile vedere che
 $\mu_{\delta}(A \cup B) = \mu_{\delta}(A) + \mu_{\delta}(B)$
non appena
 $2\delta < \text{dist}(A, B)$

Corollario Tutti i boreliani sono misurabili secondo Lebesgue!

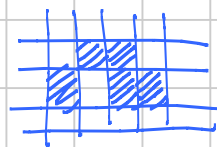
Esercizio In $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{R}^n$ tutti gli insiemi numerabili hanno misura nulla (con particolare $\mathbb{Q}$)

Basta ricoprirli così: detto $A = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$

$$A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left[a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right]}_{\substack{\text{m} \leq \frac{\varepsilon}{2^k} \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}}}$$

Via bassa alla misura di Lebesgue.

- Definisco come sempre la misura dei plurirettangoli (unioni di pluriintervalli). Bastano unioni FINITE



- Per ogni APERTO Ω definisco

$$m(\Omega) := \sup \{ m(P) : P \subseteq \Omega, P \text{ plurirettangolo} \}$$

- Per ogni COMPATTO K definisco

$$m(K) := \inf \{ m(P) : P \supseteq K, P \text{ plurirettangolo} \}$$

- Per ogni A qualunque definisco

$$m^*(A) := \inf \{ m(\Omega) : \Omega \supseteq A \text{ e } \Omega \text{ aperto} \}$$

misura
"esterna"

$$m_*(A) := \sup \{ m(K) : K \subseteq A \text{ e } K \text{ compatto} \}$$

misura
"interna"

Prop. $m_*(A) \leq m^*(A)$ per ogni A

Def. Se per caso vale il segno di $=$, allora dico che A è misurabile secondo Lebesgue e il valore comune è la misura.

Altro modo di dire la stessa cosa:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon \subseteq A \subseteq \Omega_\varepsilon \quad \text{t.c.} \quad m(\Omega_\varepsilon) - m(K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

$\uparrow$ $\uparrow$
cpt. aperto

Teorema Gli insiemi misurabili in questo senso sono una σ -algebra e la misura ristretta a loro è numerabilmente additiva.

In realtà è la stessa dell'altra costruzione.

— o — o —