

Teoria della Misura — LEZIONE 3 (AM2-133)

Titolo nota

17/05/2016

Esempi di misura

① La misura che conta i punti $\mu(A) = \text{numero di el. di } A$
Misura di tipo 1 con $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$.

② Delta di DIRAC. Scelgo $x_0 \in X$ a piacere e pongo

$$\mu_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

Misura di tipo 1 con $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$.

③ La somma di 2 misure di tipo N ($N=1,2,3$) è una misura di tipo N (nei casi 1 e 3 serve che la σ -alg. sia la stessa). Il prodotto di una misura di tipo N per un certo $\lambda > 0$ è ancora una misura.

La differenza tra 2 misure vettoriali è ancora una misura vettoriale.

— o — o —

Costruzione di misure: $\rightarrow$ Metodo I

$\rightarrow$ Metodo II

$\rightarrow$ Metodo III (dualità con C_0^*)

METODO I Sia X insieme, sia $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ un sottoinsieme qualunque (non vuoto), sia

$$m: \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$$

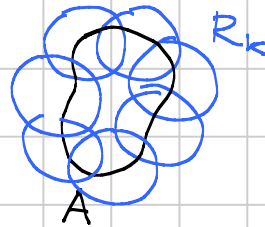
qualunque con $m(\emptyset) = 0$.

$\uparrow$ incluso o escluso
cambia poco

Pongo per ogni $A \subseteq X$

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} m(R_k) : A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k, R_k \in \mathcal{R} \right\}$$

se è possibile ricoprire A con el. di $\mathcal{R}$ e
 $\mu(A) = \infty$ se non riesco a ricoprire o
 la serie diverge sempre.



Prop. La μ costruita sopra è una misura esterna

Dim. Banale o quasi.

- $\mu(\emptyset) = 0$ facile
- monotona: se $A \subseteq B$, allora ogni ricoprimento di B è anche ric. di A .
- numerabile sub-additività

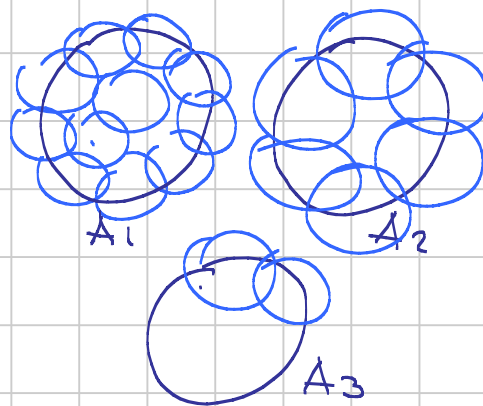
$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$$

Basta considerare il caso in cui $\mu(A_k)$ sono finiti e la serie converge.

ricopro A_1 con $R_{1,k}$ in modo tale che

$$A_1 \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R_{1,k}$$

$$\text{e } \mu(A_1) \geq \sum_{k=0}^{\infty} m(R_{1,k}^E) - \frac{1}{2}\varepsilon$$



... ricopro A_i con $R_{i,k}$ in modo tale che

$$A_i \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R_{i,k}^E \quad \text{e} \quad \mu(A_i) \geq \sum_{k=0}^{\infty} m(R_{i,k}^E) - \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Allora $R_{i,k}$ al variare di i e k ricoprono $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ e quindi

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &\leq \sum_{i,k} m(R_{i,k}^E) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) + \varepsilon \end{aligned}$$

Esempio $\mathbb{X} := \mathbb{R}$ $\mathcal{R} = \text{intervalli } [a, b]$
(decido come mi pare con gli estremi)

$$m: \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty) \quad m([a, b]) = b - a$$

$\leadsto$ con il metodo I ottengo una misura esterna μ che è la misura di Lebesgue.

Oss. A livello di teoria astratta nulla garantisce che

$$\mu(\mathcal{R}) = m(\mathcal{R}) \quad \forall \mathcal{R} \in \mathcal{R}.$$

Questo è vero per Lebesgue se dimostro un lemma che dice che

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} [a_k, b_k] \Rightarrow b - a \leq \sum_{k=0}^{\infty} (b_k - a_k)$$

Più in generale in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^n$ considero $\mathcal{R} = \text{prodotto di intervalli}$ e definisco m come in Riemann caso banale.

Oss. La misura di $\mathbb{Q}$ è 0. Per ogni $\varepsilon > 0$ posso ricoprire $\mathbb{Q}$ con intervalli chiusi la somma delle cui lunghezze è $\leq \varepsilon$.

(Numero i razionali $q_0, q_1, \dots, q_k, \dots$)

$$\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \left[q_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, q_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \right]$$

$$\begin{array}{c} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ q_k \end{array}$$

METODO II $(\mathbb{X}, d)$ metrico, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ e $m: \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty)$ come prima.

Per ogni $\delta > 0$ e per ogni $A \subseteq \mathbb{X}$ pongo

$$\mu_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} m(R_k) : A \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k, R_k \in \mathcal{R}, \text{diam}(R_k) \leq \delta \right\}$$

Fissato $A \subseteq \mathbb{X}$, vale $\mu_{\delta_1}(A) \leq \mu_{\delta_2}(A)$ se $\delta_2 \leq \delta_1$

quindi ha senso porre

$$\mu(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mu_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mu_\delta(A)$$

Prop. Tutte le μ_δ sono misure esterne

(μ_δ è costruita con il metodo I a partire da un opportuno $\mathcal{R}_\delta$)

Inoltre anche μ è una misura esterna

(sull'insieme: il limite crescente di misure esterne è una misura esterna).

Esempio $(\mathbb{X}, d)$ metrico, $\mathcal{R} = \begin{cases} \text{tutti i sottoinsiemi limitati} \\ \text{palle (chiuso o aperto non cambia)} \end{cases}$

$m(R) = (\text{diam } R)^\lambda$ dove $\lambda \geq 0$ è un esponente fisso.

La μ che ottengo è detta misure di HAUSDORFF λ -dimensionale.

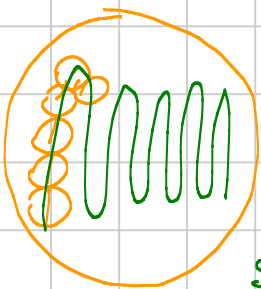
Esempio più esempio $(\mathbb{X}, d) = \mathbb{R}^2$ euclideo

$\lambda = 1$ otteniamo una misura H^1 . Moralmente cos'è?

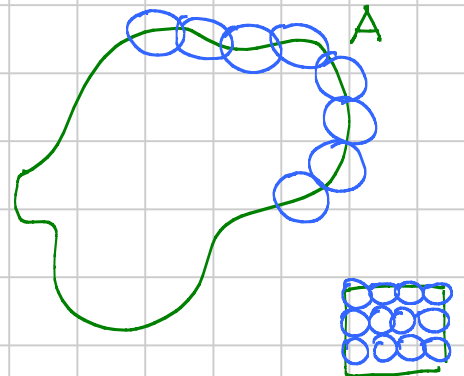
Preso A , lo ricopro con palle di raggio

$\leq \delta$ e sommo i diametri

Otengo circa la lunghezza



Il δ piccolo costringe a seguire bene l'insieme A .



Se A ha parte interna, diciamo $A = \text{quadrato } [0,1]^2$

quando ho $\delta = \frac{1}{n}$ servono n^2 cerchi e pago $n^2 \cdot \text{diam} = n \rightarrow +\infty$

Esempio $(X, d) = \mathbb{R}^2$ $\lambda = 2$: ottengo Lebesgue a meno di un fattore di molteplicità

In $\mathbb{R}^2$ faccio metodo II a partire dai rettangoli

$m(R) = \text{area rettangolo}$

ma ho vincolo del δ nel ricoprire.

Non cambia nulla, perché posso sostituire ogni rettangolo grande con tanti rettangoli piccoli, pagando UGUALE.

