

Teoria della misura — LEZIONE 2 (AM2-132)

Titolo nota

17/05/2016

Passaggio al limite della misura

Prop. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia A_m una succ. di elementi di $\mathcal{M}$ CRESCENTE, cioè

$$A_{m+1} \supseteq A_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Sia } A_\infty := \bigcup_{i=0}^{\infty} A_m.$$

Allora

$$\mu(A_\infty) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mu(A_m)$$

(Beppo Levi a distanza)

Dim. Intanto il lim. esiste (in $[0, +\infty]$) perché $\mu(A_m)$ è monotona.

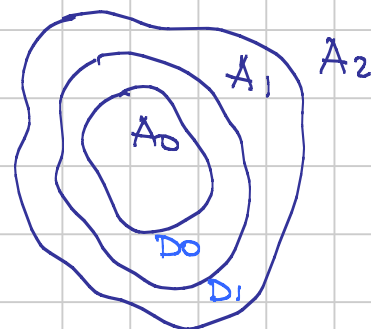
$$\mu(A_\infty) \geq \mu(A_m) \quad \text{vera per ogni } m \in \mathbb{N} \text{ perché } A_\infty \supseteq A_m$$

Basta dim. quella opposta.

Pongo

$$D_m := A_{m+1} \setminus A_m$$

Allora



$$A_\infty = A_0 \cup \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} D_m \right) \leftarrow \text{unione disgiunta}$$

$$\stackrel{\sigma\text{-add.}}{=} \mu(A_0) + \sum_{m=0}^{\infty} \mu(D_m)$$

$$= \mu(A_0) + \sum_{m=0}^{\infty} [\mu(A_{m+1}) - \mu(A_m)]$$

$$\mu(D_m) = \mu(A_{m+1}) - \mu(A_m)$$

$$A_{m+1} = A_m \cup D_m$$

$$\mu(A_{m+1}) = \mu(A_m) + \mu(D_m)$$

$$= \mu(A_0) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n [\mu(A_{k+1}) - \mu(A_k)]}_{\text{telescopica}}$$

$$= \mu(A_0) + \lim_{n \rightarrow +\infty} [\mu(A_{n+1}) - \mu(A_0)]$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_{n+1})$$

Imprecisione: per dire che $\mu(D_n) = \mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)$ serve che le 2 misure al RHS siano finite.

Come me la cavo?

Devo dim. che $\mu(A_\infty) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$

se RHS = $+\infty$, è facile. Altrimenti, tutte le misure sono finite.

Oss. La proposizione vale nel contesto ① e anche per misure vettoriali (nel contesto ③ basta la seconda parte della dim. perché non ci sono $+\infty$)

Prop. Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ come prima. Sia A_n succ. decrescente di elementi di $\mathcal{M}$, cioè $A_{n+1} \subseteq A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che $\mu(A_1) < +\infty$.

Allora $\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$

Oss. L'ipotesi $\mu(A_1) < +\infty$ serve, altrimenti metto in $X = \mathbb{N}$ la misura che conta gli elementi, cioè

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty & \text{se } A \text{ è infinito} \\ |A| & \text{se } A \text{ è finito} \end{cases} \quad A_n = \{n, n+1, \dots\}$$

↑
numero elem.

Dom. Prop. Analoga alla precedente (vedere dove serve l'ipotesi)

COSTRUZIONE DI CARATHEODORY

Sia $\mathcal{X}$ insieme, e sia $\mu: \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna. Considero l'insieme dei sottoinsiemi $M \subseteq \mathcal{X}$ tali che

$$\mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M) \quad \forall A \subseteq \mathcal{X}$$

(Dico che M "divide bene ogni A ")

Allora l'insieme degli M che dividono bene ogni A è una sigma algebra $\mathcal{M}_\mu$, e la restrizione di μ ad $\mathcal{M}_\mu$ è una misura nel senso ①.

Dim. Osservazioni preliminari.

- M divide bene A se e solo se $\mu(A) \geq \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M)$
- se $\mu(M) = 0$, allora M divide bene ogni A . Infatti

$$\begin{aligned} \mu(A) &\geq \underbrace{\mu(A \setminus M)}_{\text{monot.}} = \underbrace{\mu(A \setminus M) + \mu(A \cap M)}_{\mu(A \cap M) \leq \mu(M) = 0} \\ &\quad \uparrow \text{monot.} \end{aligned}$$

- Se M divide bene ogni A , allora M^c divide bene ogni A . Basta osservare che la richiesta è simmetrica

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M) = \mu(A \cap M) + \mu(A \cap M^c)$$

Ora identifichiamo con $\mathcal{M}_\mu$ l'insieme degli M che dividono bene ogni A e mostriamo che è stabile per unioni numerabili.

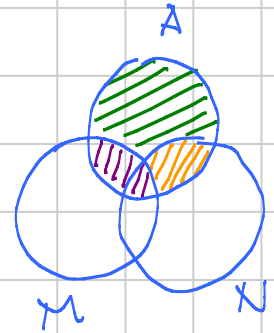
Step 1 Se $M \in \mathcal{M}_\mu$ e $N \in \mathcal{M}_\mu$, allora $M \cup N \in \mathcal{M}_\mu$

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap M) + \mu(A \cap M^c)$$

$\mu \uparrow$ divide bene

$$\begin{aligned} &\geq \underbrace{\mu(A \cap M)}_{\substack{N \text{ divide } A \cap M^c \\ \text{bene}}} + \underbrace{\mu(A \cap M^c \cap N)}_{\text{bene}} + \underbrace{\mu(A \cap M^c \cap N^c)}_{\text{bene}} \\ &\geq \mu(A \cap (M \cup N)) + \mu(A \cap (M \cup N)^c) \end{aligned}$$

e quindi $M \cup N$ divide bene ogni A .



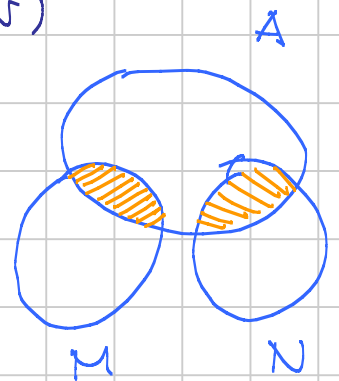
Step 2 Se $M \in \mathcal{M}_\mu$, $N \in \mathcal{M}_\mu$, $M \cap N = \emptyset$, $A \subseteq X$ qualunque, allora

$$\mu(A \cap (M \cup N)) = \mu(A \cap M) + \mu(A \cap N)$$

Uso che M divide bene $A \cap (M \cup N)$

$$\mu(A \cap (M \cup N)) =$$

$$= \underbrace{\mu(A \cap (M \cup N) \cap M)}_{A \cap M} + \underbrace{\mu(A \cap (M \cup N) \cap M^c)}_{A \cap N}$$



Step 2.5 Stessa cosa con una unione finita

$$\mu(A \cap (\bigcup_{k=1}^n M_k)) = \sum_{k=1}^n \mu(A \cap M_k)$$

se gli $M_k \in \mathcal{M}_\mu$
e sono disgiunti

Si fa per induzione su n .

Step 3 Sia ora M_n una succ. di el. di M_μ .
Voglio dim. che la loro unione sta in M_μ .

Intanto wlog posso supporre che siano disgiunti.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ so che $\bigcup_{k=1}^n M_k \in M_\mu$, quindi divide bene ogni A , quindi

$$\mu(A) = \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n M_k\right)\right) + \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n M_k\right)^c\right)$$

$$(\text{monot.}) \geq \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n M_k\right)\right) + \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty M_k\right)^c\right)$$

$$(\text{Step 2.5}) = \sum_{k=1}^n \mu(A \cap M_k) + \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty M_k\right)^c\right)$$

Questa è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi passando al lim. ottengo

$$\mu(A) \geq \sum_{k=1}^\infty \mu(A \cap M_k) + \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty M_k\right)^c\right)$$

$$\geq \mu\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty M_k\right)\right) + \mu(\dots)$$

vera perché $A \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty M_k\right) = \bigcup_{k=1}^\infty (A \cap M_k)$

+ subadditività numerabile.

Questo mostra che $\bigcup M_n \in M_\mu$.

Ci sarebbe da dim. che

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty M_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(M_n) \quad \text{se } M_n \text{ sono disgiunti}$$

è banale. Per il $\geq$ uso che $\bigcup_{k=1}^\infty M_k \supseteq \bigcup_{k=1}^n M_k$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty M_k\right) \geq \mu\left(\bigcup_{k=1}^n M_k\right) \stackrel{\text{Step 2.5 con } A=\mathbb{X}}{=} \sum_{k=1}^n \mu(M_k) \quad \text{e poi passo al limite}$$

