

Fine del conto su integrali di Fresnel. Resta da dim

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} \omega_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} \omega_2 = 0$$

$$\gamma_2: (n \cos t, n \sin t): t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

Tutto si riduce ad integrali del tipo

$$n e^{-n^2(\cos^2 t - \sin^2 t)} \cdot \text{roba trigonometrica } dt$$

Quindi basta dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/4} n e^{-n^2(\cos^2 t - \sin^2 t)} dt = 0$$

↓
○ puntualmente in $[0, \frac{\pi}{4}]$
Cua tende a +∞ in $t = \frac{\pi}{4}$
⇒ ADDIO conv. unif.

$$\int_0^{\pi/4} n e^{-n^2(\cos^2 t - \sin^2 t)} dt = \int_0^{\pi/4} n e^{-n^2 \cos(2t)} dt = \frac{n}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \cos t} dt$$

$$(y = \frac{\pi}{2} - t) = \frac{n}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \sin t} dt$$

Ci siamo ridotti a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^{\pi/2} e^{-n^2 \sin t} dt$$

Provo a spezzare

$$n \int_0^{\pi/2} = n \int_0^{A_n} \dots + n \int_{A_n}^{\pi/2} \dots \quad A_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$$= n \underbrace{\int_0^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} \dots}_{I_1} + n \underbrace{\int_{\frac{1}{n\sqrt{n}}}^{\pi/2} \dots}_{I_2}$$

Ora $I_1 = n \int_0^{\frac{1}{n\sqrt{n}}} \underbrace{e^{-\dots}}_{\leq 1} dt \leq n \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} \rightarrow 0$

$$I_2 = n \int_{\frac{1}{n\sqrt{n}}}^{\pi/2} e^{-\dots} dt \leq n \int_{\frac{1}{n\sqrt{n}}}^{\pi/2} e^{-n^2 \sin^2 \frac{1}{n\sqrt{n}}} dx$$

$$\leq n \frac{\pi}{2} e^{-n^2 \sin^2 \frac{1}{n\sqrt{n}}} \rightarrow 0$$

è come se fosse $n e^{-\sqrt{n}}$

— 0 — 0 —

WRONSKIANO

Esercizio Siano $a(t)$ e $b(t)$ due funzioni continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Consideriamo l'eq. diff.

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$$

① Data una soluzione $u(t)$, che ovviamente esiste globalmente, allora

→ 0 $u(t) \equiv 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

→ 0 l'insieme $\{t \in \mathbb{R} : u(t) = 0\}$ non ha p.to di accumulazione.

Dim. Supponiamo che l'insieme degli zeri di $u(t)$ abbia un p.to di accumulazione $t_0 \in \mathbb{R}$. Allora (analisi 1)

$$u(t_0) = 0$$

$$u'(t_0) = 0$$

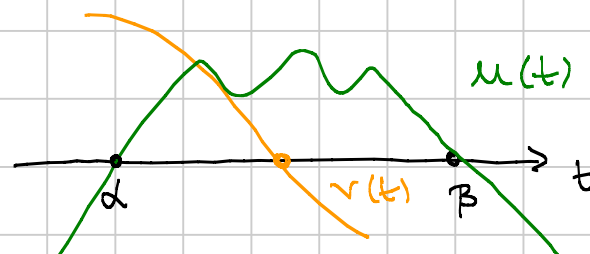
(vedi video)

⇒ per unicità $u(t) \equiv 0$.

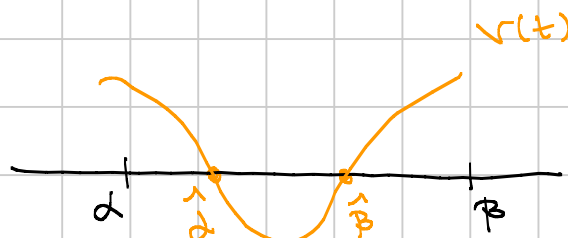
② Sia ora $u(t)$ una soluzione non identicamente nulla. Siano α e β due zeri consecutivi di $u(t)$, cioè $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ e $u(t) \neq 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. Sia $v(t)$ un'altra soluzione NON multipla di $u(t)$. Allora $v(t)$ si annulla esattamente una volta in (α, β) (TEOREMA DI OSCILLAZIONE)

Oss. Se dimostro che si annulla almeno una volta, allora automaticamente si annulla esattamente una volta.

Basta scambiare i ruoli di $u(t)$ e $v(t)$.



Data $v(t)$, ogni altra soluz. non multipla, quindi anche $u(t)$, dovrebbe annullarsi in $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$.



Oss. Dove si annullano le soluz. non identicamente nulle cambiano segno (se non lo facessero avrebbero p.to di max/min, quindi derivata nulla).

Dim. tes. oscillazione Introduco il Wronskiano

$$W(t) := \text{Det} \begin{pmatrix} u(t) & v(t) \\ \dot{u}(t) & \dot{v}(t) \end{pmatrix} = u\dot{v} - \dot{u}v$$

$$\begin{aligned} W'(t) &= [u\dot{v} - v\dot{u}]' = \cancel{\dot{u}\dot{v}} + u\ddot{v} - \cancel{\dot{v}\dot{u}} - v\ddot{u} \\ &= u(-a\dot{v} - b\dot{v}) - v(-a\dot{u} - b\dot{u}) \\ &= -a u\dot{v} - b u\dot{v} + a v\dot{u} + b v\dot{u} \\ &= -a(t) W(t) \end{aligned}$$

Quindi $w'(t) = -a(t) w(t)$ da cui

$$w(t) = w(0) e^{-A(t)} \quad \text{dove } A(t) = \int_0^t a(s) ds$$

Oss. fondamentale: $\rightarrow 0 \quad w(t) \equiv 0$

$\rightarrow 0 \quad w(t) \neq 0$ sempre e con lo stesso segno

$$w(\alpha) = - \underbrace{u(\alpha)}_{\neq 0} \underbrace{v(\alpha)}_{\neq 0}$$

$\uparrow$
altrimenti $u \equiv 0$.
 $\neq 0$ $\neq 0$, altrimenti v sarebbe multipla di u

$$w(\beta) = -u(\beta) v(\beta)$$

Se v non si annullasse mai in $[\alpha, \beta]$, allora $v(\alpha)$ avrebbe lo stesso segno di $v(\beta)$, ma allora $u(\alpha)$ avrebbe lo stesso segno di $u(\beta)$, ma questo non è possibile.

Come già detto, v non può annullarsi in α e β perché sarebbe multipla di u , quindi si annulla in (α, β) .

— 0 — 0 —

DELIRIO Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Dico che $c \in \mathbb{R}$ è un valore critico se esiste $x \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$f(x) = c \quad \text{e} \quad \nabla f(x) = 0.$$

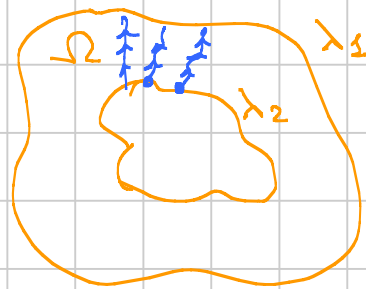
Consideriamo le linee di livello $\{x \in \mathbb{R}^n: f(x) = \lambda\} = L_\lambda$

Se $\lambda_1 < \lambda_2$ e L_{λ_1} non è omeomorfa a L_{λ_2} , allora esiste un $c \in (\lambda_1, \lambda_2)$ critico.

Dim. Considero l'eq. diff. $\ddot{u} = - \frac{\nabla f(u)}{|\nabla f(u)|^2}$

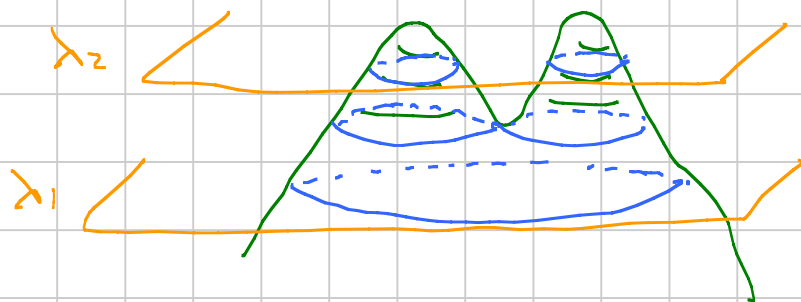
Se non ci sono livelli critici tra λ_1 e λ_2 , l'equazione è ben definita in Ω .

Allora per ogni dato in λ_2 esiste una soluzione.



$$[f(u)]' = \langle \nabla f(u), \ddot{u} \rangle = \langle \nabla f(u), - \frac{\nabla f(u)}{|\nabla f(u)|^2} \rangle = -1$$

Quindi la soluzione u , pensata come funzione di t e del dato iniziale in L_{λ_2} , definisce una omotopia tra L_{λ_2} e L_{λ_1} . La continuità in x è dip. cont. dal dato iniziale.



— o — o —