

$$F(\lambda) := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

Già visto : 1 - $F(\lambda)$ è definita in $[0, +\infty)$

2 - $F(\lambda) \rightarrow 0$ per $\lambda \rightarrow +\infty$

3 - F è continua in $[0, +\infty)$

Da vedere : 4 - F è derivabile in $(0, +\infty)$ e $F'(\lambda) = -\frac{1}{1+\lambda^2}$

Già visto : 1+2+3+4 $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = F(0) = \frac{\pi}{2}$

Vorrei tanto poter scambiare derivata e integrale

$$F'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\sin x}{x} e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} \sin x e^{-\lambda x} dx$$

teo.
Scambio

questo si calcola con
2 passaggi x punti +
grande ritorno

Integrali dip. da parametro già visti su un intervallo. Ora
senza impropri.

Teorema (Derivazione di un integrale improprio dipendente da
parametro - Low cost)

Sia $A \in \mathbb{R}$, sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e sia

$$f: \underbrace{(a, b)}_{\substack{\psi \\ t}} \times \underbrace{[A, +\infty)}_{\substack{\varphi \\ x}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Poniamo

$$\varphi(t) := \int_A^{+\infty} f(t, x) dx \quad \forall t \in (a, b)$$

Supponiamo che

(i) f sia continua in $(a,b) \times [A, +\infty)$

(ii) f_t " " " " "

(iii) esiste $g: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq A$$

$+\infty$

$$\int_A^{+\infty} g(x) dx < +\infty$$

$$(iv) |f_t(t, x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq A$$

(posso prendere la stessa $g(x)$ o una diversa)

Allora φ è derivabile in (a,b) e vale

$$\varphi'(t) = \int_A^{+\infty} f_t(t, x) dx \quad \forall t \in (a, b).$$

Oss. L'ipotesi essenziale è la (iv) cioè una DOMINAZIONE UNIFORME della derivata.

Dim. Prendo $t_0 \in (a,b)$ e faccio il rapp. increment. (wlog $R > 0$)

$$\frac{\varphi(t_0+R) - \varphi(t_0)}{R} = \int_A^{+\infty} \frac{f(t_0+R, x) - f(t_0, x)}{R} dx$$

$$0 < c(R, x) < R$$

$$= \int_A^{+\infty} f_t(t_0 + c(R, x), x) dx$$

Dico che questo tende a $\int_A^{+\infty} f_t(t_0, x) dx$

Fisso $\varepsilon > 0$, e faccio vedere che per R piccolo la diff. è $\leq \varepsilon$.

$$\left| \int_A^{+\infty} f_t(t_0 + c(R, x), x) dx - \int_A^{+\infty} f_t(t_0, x) dx \right| \leq \dots$$

$$\begin{aligned}
&\leq \dots \int_A^B |f_t(t_0 + c(R, x), x) - f_t(t_0, x)| dx & I_1 \\
&+ \int_B^{+\infty} |f_t(t_0 + c(R, x), x)| dx & I_2 \\
&+ \int_B^{+\infty} |f_t(t_0, x)| dx & I_3
\end{aligned}$$

Nell'ordine

$$\rightarrow \text{Fisso } B > A \text{ t.c. } \int_B^{+\infty} g(x) dx \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad (\text{posso per hp su } g(x))$$

Da questo deduco che

$$I_2 \leq \frac{1}{4} \varepsilon \quad I_3 \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

$\rightarrow$ Visto che ormai B è fissato, uso l'unif. cont. di f_t in $[t_0, t_0 + R] \times [A, B]$ (che è compatto) e ottengo un $R_0 > 0$ tale che

$$|f_t(t_0 + c(R, x), x) - f_t(t_0, x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{B-A}$$

$$\forall x \in [A, B] \quad \forall R \in [0, R_0]$$

$$\text{Da questo deduco che } I_1 \leq \frac{1}{2} \varepsilon.$$

$$\text{Quindi } I_1 + I_2 + I_3 \leq \varepsilon.$$

Questo basta per concludere nell'esempio.

$$f(t, x) = \frac{\sin x}{x} e^{-tx}$$

$$f_t(t, x) = \sin x e^{-tx}$$

Fisso $t_0 > 0$ e applico il teo.

$$0 \quad \frac{t_0}{2} \quad t_0 \quad \frac{3t_0}{2}$$

nell'intervallo $(\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2})$ dove vale la dominazione

$$|f_t(t, x)| \leq e^{-tx} \leq \underbrace{e^{-\frac{t_0}{2}x}}_{g(x)} \quad \forall t \in [\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}]$$

$\forall x \geq 0$

$g(x)$
integrabile.

Esempio 2

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= \int_0^{+\infty} e^{-tx} dx \quad \forall t > 0 \\ &= \left[-\frac{1}{t} e^{-tx} \right]_0^{+\infty} \leftarrow \text{ovibile} \\ &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$\varphi(t)$ è derivabile per il teorema di prima. Infatti $f(t, x) = e^{-tx}$

$$|f_t(t, x)| = |x e^{-tx}| \leq \underbrace{|x e^{-\frac{t_0}{2}x}|}_{g(x)} \quad \text{nella stessa zona di prima}$$

Derivando sotto il segno di integrale ottengo

$$\varphi'(t) = \int_0^{+\infty} -x e^{-tx} dx = -\frac{1}{t^2}$$

Voleendo posso iterare (riapplicando il teo.)

$$\varphi''(t) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-tx} dx = \frac{2}{t^3}$$

e così via

$$\varphi^{(n)}(t) = (-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} dx = (-1)^n \frac{n!}{t^{n+1}}$$

Mettenendo $t=1$ otteniamo

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!}$$

INTEGRALI DI FRESNEL

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx}_S = \underbrace{\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx}_C = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Idea che sta sotto: pensare a e^{-z^2} con $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} e^{-z^2} &= e^{-(x+iy)^2} = e^{-x^2-y^2-2ixy} \\ &= e^{-x^2-y^2} \cos(2xy) - e^{-x^2-y^2} \sin(2xy) i \end{aligned}$$

Dim. Considero due forme differenziali

$$\omega_1 := \underbrace{e^{-x^2-y^2} \cos(2xy) dx}_A + \underbrace{e^{-x^2-y^2} \sin(2xy) dy}_B$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2y e^{-x^2-y^2} \cos(2xy) - e^{-x^2-y^2} \sin(2xy) 2x$$

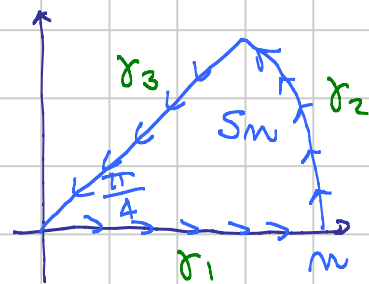
$$\frac{\partial B}{\partial x} = -2x e^{-x^2-y^2} \sin(2xy) + e^{-x^2-y^2} \cos(2xy) 2y$$

$$\omega_2 := e^{-x^2-y^2} \sin(2xy) dx - e^{-x^2-y^2} \cos(2xy) dy$$

... verifico che anche ω_2 è esatta.

Integro le 2 forme su un settore (bordo)

$$S_n: 0 \leq \rho \leq n, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$



$$0 = \int_{\partial S_n} \omega_1 = \int_{\partial_1} \omega_1 + \int_{\partial_2} \omega_1 + \int_{\partial_3} \omega_1$$

$$0 = \int_{\partial_1} \omega_2 + \int_{\partial_2} \omega_2 + \int_{\partial_3} \omega_2$$

$$\int_{\gamma_1} \omega_1 = \int_0^n e^{-t^2} dt$$

$\uparrow$
 $(t, 0)$

$$\int_{\gamma_1} \omega_2 = 0$$

$$\int_{\gamma_3} \omega_1 = \int_0^n \cos(t^2) + \sin(t^2) dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \gamma_3 = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) : t \in [0, n]$$

$$\int_{\gamma_3} \omega_2 = \int_0^n \sin(t^2) - \cos(t^2) dt \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Supponiamo di sapere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} \omega_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} \omega_2 = 0$$

$$0 = \int_{\gamma_1} \omega_1 + \int_{\gamma_2} \omega_1 + \int_{\gamma_3} \omega_1 = \int_{\gamma_1} \omega_2 + \int_{\gamma_2} \omega_2 + \int_{\gamma_3} \omega_2$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(C+S) \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(S-C)$

$\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ No: è $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ corretto dopo video

Dalla seconda otteniamo $S = C$. A questo punto dalla 1^a

$$0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} 2S \quad \leadsto \text{viene un segno sbagliato dovuto all'orientazione sbagliata di } \gamma_3.$$

C'è pure un $\sqrt{2}$ di troppo che va chiarito.

$\uparrow$ (colpa della posizione del 2 nell'integrale di e^{-t^2} : corretto dopo video)