

Esercizio $\ddot{u} = -u^2$

$$\ddot{u} = -u^2$$

$\ddot{u} = f(u) \leadsto$ metodo energ.

$$\ddot{u} \dot{u} = -u^2 \dot{u} \quad \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[-\frac{1}{3} u^3 \right]'$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{3} u^3}_{E(u, \dot{u})} = k \quad (\text{costante che dipende solo dai dati iniziali})$$

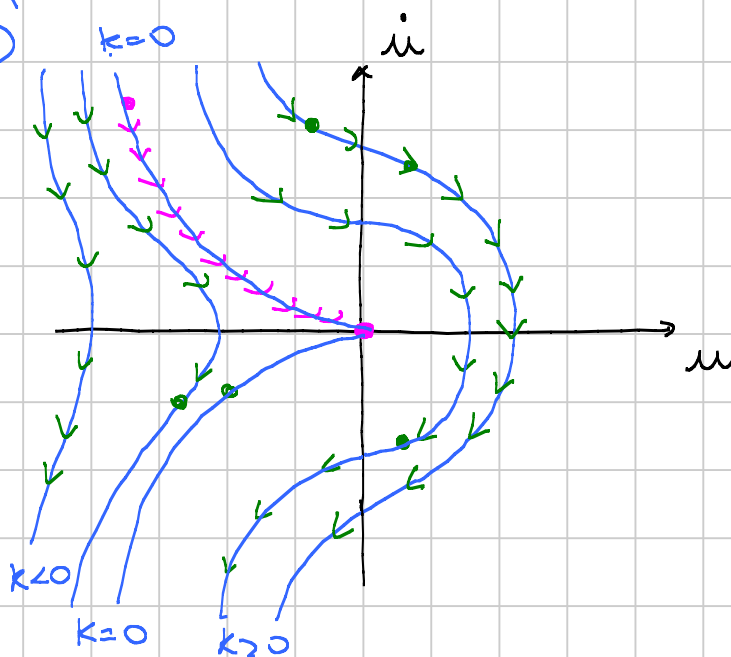
Le traiettorie nello spazio delle fasi "vivono" sulle linee di livello di $E(u, \dot{u})$

$$u^3 = k - \frac{3}{2} \dot{u}^2$$

$$u = \sqrt[3]{k - \frac{3}{2} \dot{u}^2}$$

$$k=0 \quad u = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \dot{u}^{\frac{2}{3}}$$

$$k < 0 \quad k > 0$$



$$\ddot{u} \leq 0 \Rightarrow \dot{u} \text{ va in giù}$$

Domande: La linea di livello

viene percorsa tutta?

Se viene percorsa tutta, c'è esistenza globale oppure blow-up?

→ Mettiamo di partire con $\dot{u}(0) < 0$. Dall'equazione deduciamo che $\dot{u}(t) < 0$ finché la soluz. esiste nel futuro. Quindi

$$\dot{u} = -\sqrt{2k - \frac{2}{3}u^3} \Rightarrow \text{Blow up in tempo finito perché } \dot{u} \sim -u^{3/2}$$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{3} u^3 = K = \frac{1}{2} \dot{u}(0)^2 + \frac{1}{3} u(0)^3$$

Mi serve che l'argomento della radice sia ≥ 0 . Ora all'inizio lo è e poi u va decrescendo, quindi l'argomento della radice aumenta!

Quindi: le soluz. con $\dot{u}(0) < 0$ hanno blow-up in un tempo finito T

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \dot{u}(t) = -\infty$$

→ Mettiamoci ora nel caso $\dot{u}(0) > 0$. Per un po' la cond. si mantiene, quindi

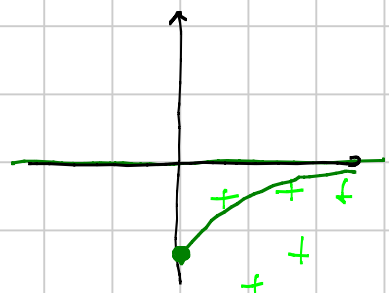
$$\dot{u} = \sqrt{2k - \frac{2}{3}u^3}$$

Se ad un certo punto la radice si annulla, cadiamo nel caso precedente.

$$\boxed{K=0} \quad \dot{u} = \sqrt{-\frac{2}{3}u^3} = \sqrt{\frac{2}{3}} |u|^{3/2}$$

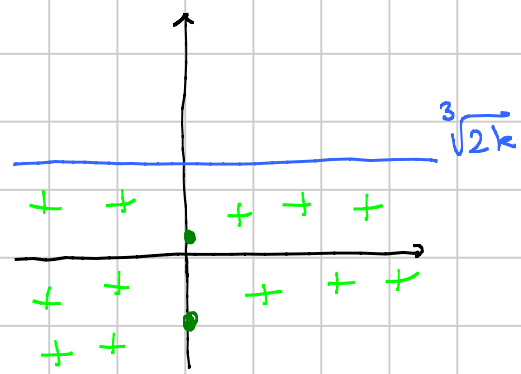
e le soluzioni di questa tendono a 0 per $t \rightarrow +\infty$

Oss. Il RHS è lip. in u localmente, quindi $u(t) \equiv 0$ non può essere attraversata, quindi $u(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$



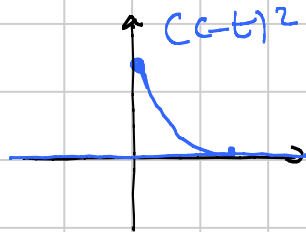
$$[k > 0] \quad \ddot{u} = \sqrt{2k - u^3} \quad u = \sqrt[3]{2k}$$

Le soluzioni arrivano in un tempo finito?



E' come risolvere $\ddot{u} = -\sqrt{u}$

$$\frac{\ddot{u}}{\sqrt{u}} = -1$$



$$2\sqrt{u} = c - t$$

$$4u = (c - t)^2$$

Tornando al caso vero posso risolvere... $\frac{\ddot{u}}{\sqrt{2k - u^3}} = 1$

L'integrale al LHS converge $\Rightarrow$ le soluzioni arrivano in un tempo finito a $\sqrt[3]{2k}$.

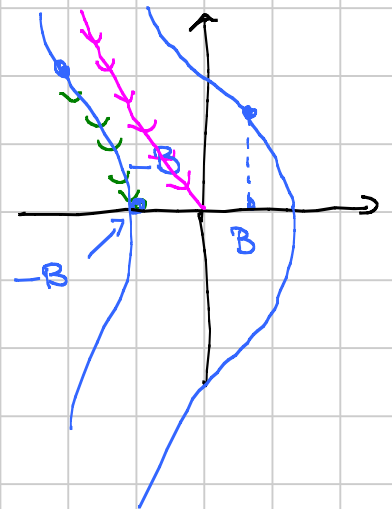
Altra dimostrazione dello stesso fatto:

Sulla curva $u(t) \leq -B \Rightarrow u(t)^2 \geq B^2$

$$\Rightarrow \ddot{u}(t) = -u(t)^2 \leq -B^2$$

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}(0) + \int_0^t \ddot{u}(s) ds$$

$\Rightarrow \ddot{u}$ si annulla in un tempo finito



Conclusione: tutte le traiettorie hanno blowup tramite una.

Meglio: per ogni $a \leq 0$ esiste unico $b \geq 0$ tale che il pbm con dati $u(0) = a$, $\ddot{u}(0) = b$ ha soluz. globale

— o — o —

BUCA DI POTENZIALE

POTENTIAL WELL

$$\ddot{u} = -u + u^3$$

$$\ddot{u} = -u$$

$$\dot{u} = u^3$$

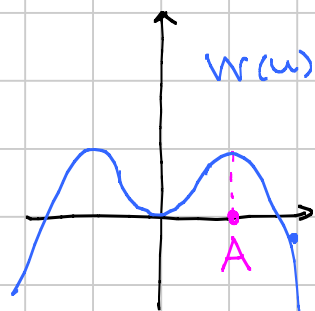
solus. periodiche

blow up probabile

Metodo energetico:

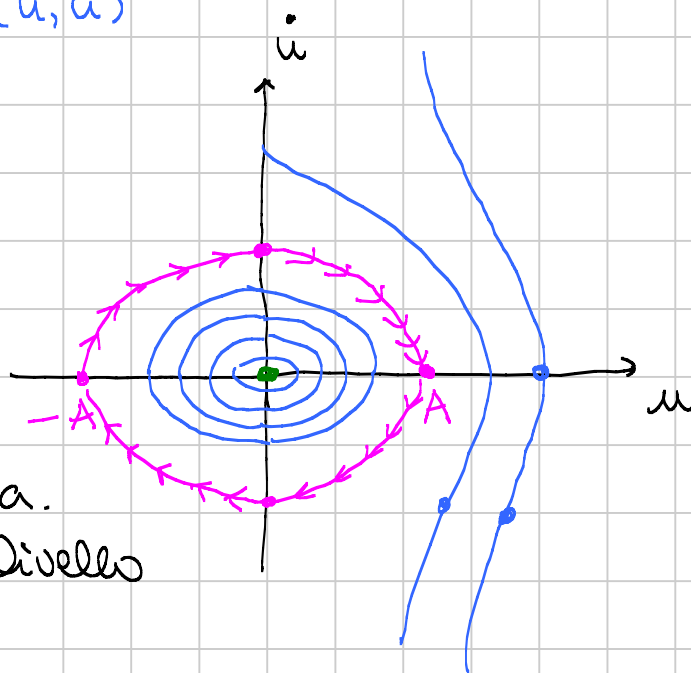
$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{4} u^4}_{V(u)} = K$$

$E(u, \dot{u})$



Le linee di livello dipendono da K

L'origine è soluzione stazionaria.
Vicino all'origine le linee di livello sono come quelle di



$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 = K$$

e queste corrispondono a traiettorie periodiche ($\ddot{u} = -u$)

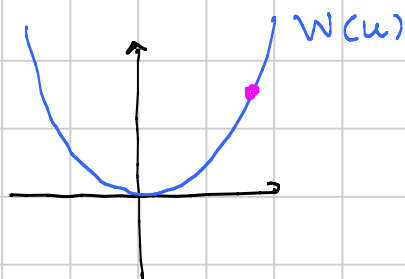
Per livelli corrispondenti a K grandi le linee di livello cambiano forma. Le traiettorie hanno blow up in un tempo finito con la stessa dim. dell'esempio precedente

$$\dot{u} = -\sqrt{K + \frac{1}{4} u^4 - \frac{1}{2} u^2} \sim -u^2 \Rightarrow \text{blow up in tempo finito}$$

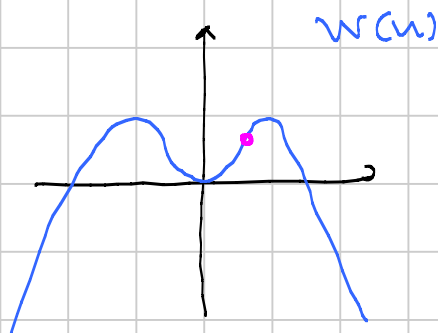
Immagine mentale

$$\ddot{u} = -u$$

$$W(u) = \frac{1}{2} u^2$$



$$\ddot{u} = -u + u^3$$



Congettura: anche da fuori ci sono soluzioni (anzi una sola) che portano sul max del potenziale