

Due specie in competizione

$$\begin{aligned} u' &= u(a - Au - \alpha v) \\ v' &= v(b - Bv - \beta u) \end{aligned} \quad \text{parametri positivi}$$

Fatto 1 Le soluzioni con $u(0) \geq 0$ e $v(0) \geq 0$ rimangono nel I quadrante

Dim. Come in VL "gli assi sono soluzioni", quindi per unicità ...

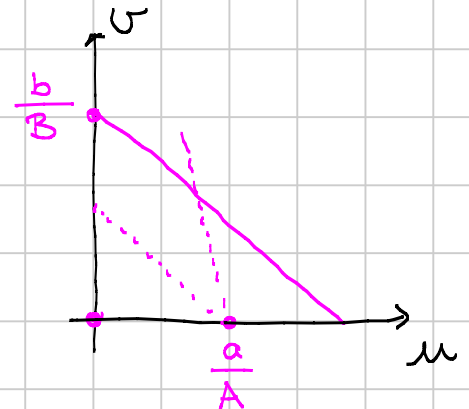
Fatto 2 Esistenza globale per $t \geq 0$ (sempre se $u(0) \geq 0$ e $v(0) \geq 0$)

Dim. $u' \leq au \Rightarrow$ no blow up $\Rightarrow$ esist. globale.
 $v' \leq bv$

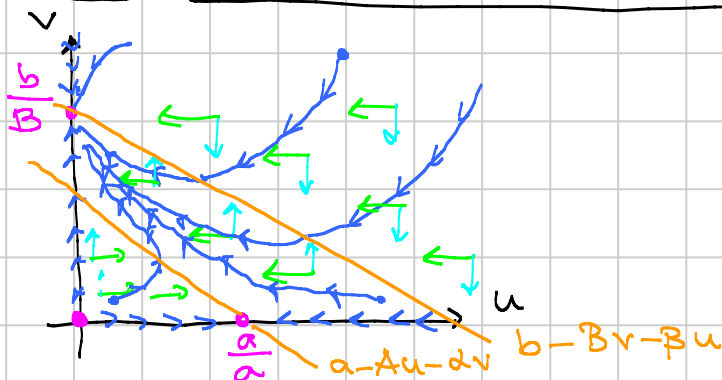
Fatto 3 P.ti stazionari sono 4: $(0,0)$, $(0, \frac{b}{B})$, $(\frac{a}{A}, 0)$

più la soluzione S di $a - Au - \alpha v = b - Bv - \beta u = 0$

S può essere o meno nel I quadrante.



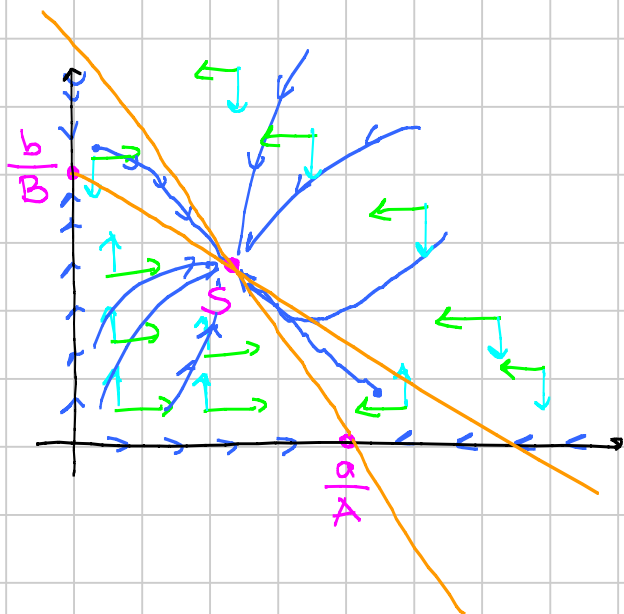
Caso 1 S non è nel I quadr



Qualunque sia il dato iniziale u si estingue e v tende al suo livello di equilibrio.

Caso 2

S è nel 1° quadrante



S è un pto asintoticamente stabile

Caso 3

Come sopra, ma con $\frac{b}{B}$ e $\frac{a}{A}$ "esterni"



Qualitativamente il disegno è quello a sx.

Facendo i conti e linearizzando, ci aspettiamo S di tipo sella, quindi autov. reali $+ -$ e la direzione di avvicinamento corrisponde all'autovettore dell'autorale negativo.

EPIDEMIA SIS

(RAFFREDDORE)

→ non si muore

→ non si diventa immuni

→ si "attacca"

M = malati

S = sani

$$M' = \underbrace{-aM}_{\text{qualcuno guarisce}} + \underbrace{bMS}_{\text{interazione sani-malati}}$$

$$S' = aM - bMS \rightarrow \text{non si muore, quindi } M+S = \text{cost}$$

$$M+S=T \quad (\text{totale}) \quad \leadsto \quad S=T-M$$

$$\leadsto \quad M' = -aM + bM(T-M) = (-a+bT)M - bM^2$$

Il segno - davanti a M^2 garantisce esistenza globale nel futuro se $M(0) \geq 0$.

Il comport. asint. dipende dal segno di $-a+bT$

• se $-a+bT < 0 \quad M(t) \rightarrow 0$

• se $-a+bT > 0 \quad M(t) \rightarrow \frac{-a+bT}{b} = M_\infty$

— o — o —

EPIDEMIA SIR Sani Infetti Rip.

→ si muore o si diventa immuni

→ si attacca

$$M' = -aM + bMS = M(-a+bS)$$

$$S' = -bMS$$

Soluzioni globali come prima

Si salva qualcuno?

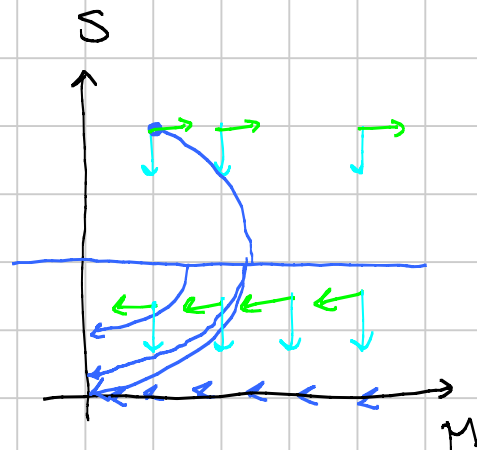
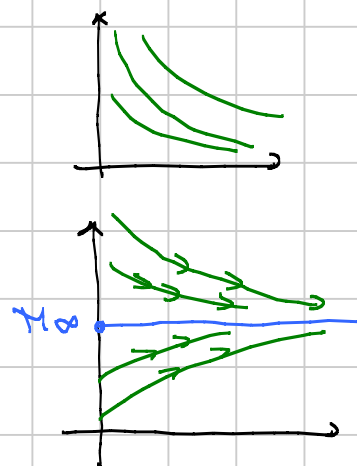
Metodo energetico $E(M,S)$

Höpe

$$0 = [E(M,S)]' = E_M (-aM + bMS) - E_S bMS$$

Divido per MS :

$$0 = E_M \left(-\frac{a}{S} + b \right) - E_S \underset{\substack{\uparrow \\ E_M}}{b}$$



Una E che funziona è

$$E(M, S) = bM + bS - a \log S = \text{costante}$$

Quindi $E(M, S)$ è costante lungo le traiettorie, quindi $S(t)$ non può tendere a 0.

Per capire la forma delle traiettorie, pensata come funzione $M(S)$, posso fare il brutale

$$\frac{dM}{dt} = -aM + bMS$$

$$\frac{dS}{dt} = -bMS$$

$$\leadsto \text{divido} \leadsto \frac{dM}{dS} = + \frac{a}{bS} - 1 \leadsto M(S) = \frac{a}{b} \log S - S + c$$

(stessa cosa ottenuta
con l'energia)

— o — o —