

Teorema di Linearizzazione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un intorno dell'origine, e sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1 tale che $F(0) = 0$.

Consideriamo il sistema $u' = F(u)$ per il quale l'origine è un pto stazionario.

Sia A la matrice $n \times n$ tale che

$$F(u) = Au + R(u)$$

$\uparrow$ matrice jacobiana di f nell'origine.

con $|R(u)| = o(|u|)$ per $u \rightarrow 0$.

Supponiamo che tutti gli autov. di A abbiano parte reale $\neq 0$

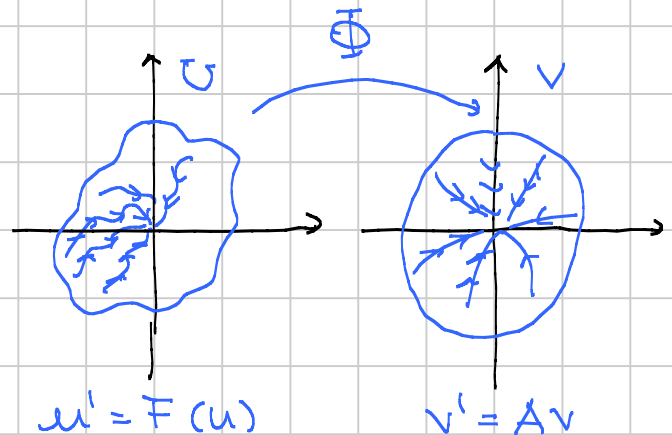
Allora le soluzioni di $u' = F(u)$ si comportano come le solus. di $v' = Av$.

Detto meglio esistono 2 intorni dell'origine U e V , ed esiste

$$\Phi: U \rightarrow V$$

omeomorfismo (continua ma non necessariamente C^1) tale

$$F(u) = \Phi^{-1}(A(\Phi(u))) \quad \forall u \in U$$



Oss. La dim. è per nulla banale e piuttosto recente (~1960)

Dim. di un caso speciale: A è diagonalizzabile e ha tutti gli autovalori reali negativi

Idea: cambio variabili in modo da diagonalizzare A .

wlog $A = \text{diag}(-\lambda_1, \dots, -\lambda_n)$

Posso quindi riscrivere il sistema nella forma

$$\dot{u}_1 = -\lambda_1 u_1 + R_1(u_1, \dots, u_n)$$

$$\dot{u}_2 = -\lambda_2 u_2 + R_2(u_1, \dots, u_n)$$

$$\dot{u} = Du + R(u)$$

$\vdots$

$$\dot{u}_n = -\lambda_n u_n + R_n(u_1, \dots, u_n)$$

Considero $E(t) := u_1^2 + \dots + u_n^2 = \|u\|^2$. Allora

$$E'(t) = 2 \langle \dot{u}, u \rangle = 2 \langle Du + R(u), u \rangle$$

$$= 2 \langle Du, u \rangle + 2 \langle R(u), u \rangle$$

$$\leq -2\nu \|u\|^2 + 2 \langle R(u), u \rangle$$

⤴
conto dis.
prec.

Uso che $\|R(u)\| = o(\|u\|)$. Esiste $\delta > 0$ t.c. $\|R(u)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|$
per ogni $\|u\| \leq \delta$

Ma allora

$$E'(t) \leq -2\nu \|u\|^2 + 2|\langle R(u), u \rangle| \quad (\text{c.s.})$$

$$\leq -2\nu \|u\|^2 + \nu \|u\|^2$$

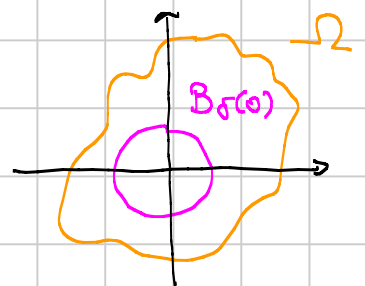
$$\leq -\nu \|u\|^2 = -\nu E(t)$$

$$-(2-\varepsilon)\nu$$

$\leadsto E(t) \rightarrow 0$ esponenzialmente, quindi le soluzioni con $E(0) \leq \delta^2$ tendono a 0 esponenzialmente $\Rightarrow$ asint. stabilità

Oss. La dimostrazione dice anche (cosa a priori non ovvia) che le soluzioni esistono globalmente

Se parto dentro $B_\delta(0)$ ci resto, quindi evito blow up e break down.



Esempio 1 Pendolo smorzato

$$\ddot{u} = -\sin u \quad (\text{pendolo vero})$$

$$\ddot{u} = -\sin u - \dot{u}$$

↑
atto di freno
proporzionale alla
velocità

Lo trasformo in un sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -\sin u - v \end{cases} \quad \text{linearizzato}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -u - v \end{cases}$$

Senza attito la lin. sarebbe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{autov. } \pm i$$



e dal linearizzato non potrei dedurre
nulla sul non OIueare

In presenza di attito la lin. in $(0,0)$ è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \text{Tr} < 0, \text{Det} > 0 \rightsquigarrow 2 \text{ autov. con parte reale negativa}$
 $\rightsquigarrow$ asintotica stabilità

$\rightsquigarrow$ le oscillazioni sono smorzate esponenzialmente.

Vediamo se sono reali o complessi e mettiamo un
parametro all' attito

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\delta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda - \delta \end{pmatrix}$$

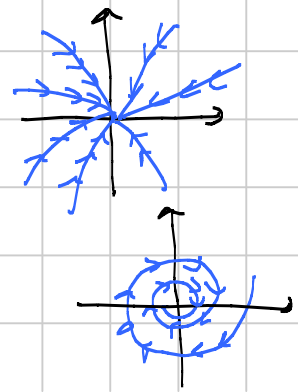
$$\lambda(\lambda - \delta) + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - \delta\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = \delta^2 - 4$$

• se $\delta > 2$ gli autov. sono reali

• Se $\delta < 2$ gli autov. sono complessi



Riconsideriamo il sistema

$$u' = v$$

$$\dot{v} = -\sin u - v$$

e osserviamo che anche $(\pi, 0)$ è stazionario. Linearizzo

$$u = \pi + w$$

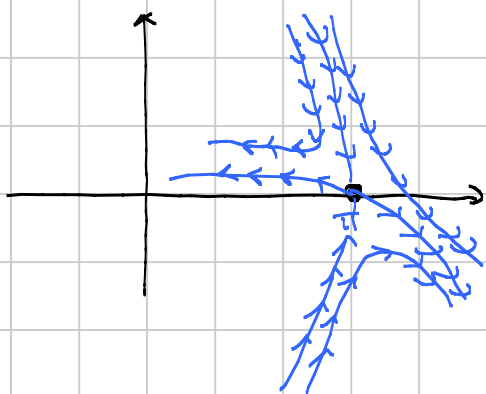
$$\dot{w} = v$$

$$\dot{v} = -\sin(\pi + w) - v = \sin w - v$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\text{Tr} < 0$ $\text{Det} < 0 \leadsto$ autovalori reali $+$ $-$

$\leadsto$ comportamento "a sella"



Esempio 2

$$\begin{cases} \dot{u} = u - 3uv \\ \dot{v} = u + v \end{cases}$$

Punti stazionari: $\begin{cases} u(1-3v) = 0 \\ u+v = 0 \end{cases} \leadsto \begin{matrix} u=0 & v=0 \\ v = \frac{1}{3} & u = -\frac{1}{3} \end{matrix}$

Per studiare la stabilità basta linearizzare

$(0,0)$ $\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leadsto$ autovalori $1, 1 \leadsto$ asintotica instabilità

$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$$u = -\frac{1}{3} + w$$

$$v = \frac{1}{3} + z$$

$$\dot{w} = \dot{u} = -\frac{1}{3} + w - 3\left(-\frac{1}{3} + w\right)\left(\frac{1}{3} + z\right)$$

$$\dot{z} = \dot{v} = -\frac{1}{3} + w + \frac{1}{3} + z$$

$$\dot{w} = w + z - w + \text{termine } zw \text{ che ignoro}$$

$$\dot{z} = w + z$$

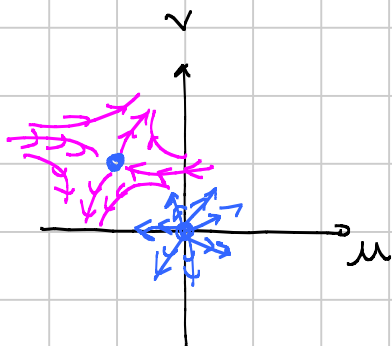
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} > 0$$

$$\text{Det} < 0$$

$\Rightarrow$ Autovalori reali $+$ $-$

$\Rightarrow$ comportamento di tipo sella



— 0 — 0 —