

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

$$u' = Au$$

↑
matrice $n \times n$

Stabilità. Si osserva che $u(t) \equiv 0$ è soluzione

- L'origine è **STABILE** se

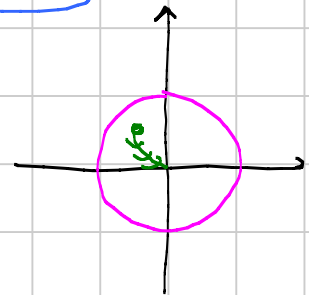
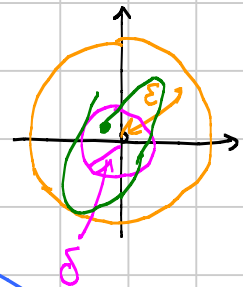
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |u(0)| \leq \delta \Rightarrow |u(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$$

(se punto vicino a 0, resto vicino a 0)

- L'origine è **ASINTOTICAMENTE STABILE** se

$$\exists \delta > 0 \text{ t.c. } |u(0)| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0$$

(se punto vicino a 0, tende all'origine)



Oss. Asint. stabile $\Rightarrow$ stabile
 ~~$\Leftarrow$~~

Teorema 1 L'origine è asintoticamente stabile (cioè tutte le soluz., vicine o lontane, tendono a 0) se e solo se tutti gli autovalori di A hanno parte reale < 0 .

Dim. Possiamo pensare A in forma di Jordan.

- per gli autov. reali con blocco da 1 si risolve esplicitamente
- per gli autov. $\alpha \pm i\beta$ con blocco 2×2 → passo in coord. polari e otteniamo $\dot{\rho} = -\alpha \rho$, $\dot{\theta} = -\beta$
- per gli autov. con molt. alg. $>$ molt. geom. è un po' più complicato e saltano funzioni $t, t^2, \dots$ (vedi les. preced.)

Teorema 2 L'origine è stabile se e solo se tutti gli autov. di A hanno parte reale ≤ 0 e tutti quelli con parte reale $= 0$ hanno blocchi di Jordan tutti di dimensione 1.

Dim. energetica del teo. 1
con autov. tutti reali e
con blocchi da 1

La matrice A è diagonalizzabile,
cioè

$$A = M^{-1} D M$$

$$D = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i > 0$$

$$\ddot{u} = A u = M^{-1} D M u$$

$$M \ddot{u} = D \underbrace{M u}_v \rightsquigarrow \ddot{v} = -D v.$$

Questo porta a definire $E(t) := \|M u(t)\|^2$. Allora

$$E'(t) = 2 \langle M u'(t), M u(t) \rangle = 2 \langle \underbrace{D M u(t)}_v, \underbrace{M u(t)}_v \rangle$$

$$\text{Osservo che } \langle D v, v \rangle = -\lambda_1 v_1^2 - \dots - \lambda_n v_n^2 \leq -\nu \|v\|^2$$

$\nu = \min\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Quindi:

$$E'(t) \leq -2\nu E(t) \quad \forall t \geq 0$$

e di conseguenza

$$E(t) \leq E(0) e^{-2\nu t} \quad \forall t \geq 0$$

Questo dice che le soluzioni vanno a 0 esponenzialmente.

Notazione: funzioni come la $E(t)$ si chiamano
"energia", o funzioni di "Lyapunov"
"qualcosa che scende"

Oss. Se qualche λ_i fosse $= 0$, lo stesso ragionamento mi dice che
 $E'(t) \leq 0$, quindi $E(t)$ limitata, quindi l'origine è stabile.

Oss. La stessa dimostrazione funziona anche con autovalori $\alpha \pm i\beta$, purché i blocchi siano tutti 2×2 (la dim. è quella della des. prec. perché $E(t) = \rho^2$)

Esercizio Dimostrare in modo energetico il caso $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u' = -\lambda u + v \\ v' = -\lambda v \end{cases}$$

Euristica: cerco $E(t)$ del tipo $E(t) := u^2(t) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro da} \\ \text{scegliere}}}{a} v^2(t)$

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2u\dot{u} + 2av\dot{v} = 2u(-\lambda u + v) + 2av(-\lambda v) \\ &= -2\lambda u^2 - 2a\lambda v^2 + 2uv \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{spero}}}{\leq} -\varepsilon (u^2 + av^2) = -\varepsilon E(t) \end{aligned}$$

Se riesco a trovare a ed ε positivi per cui vale ho che $E(t) \rightarrow 0$, quindi $u(t) \rightarrow 0$ e $v(t) \rightarrow 0$ (esponenzialm.)

La speranza equivale a

$$(2\lambda - \varepsilon) u^2 + (2a\lambda - \varepsilon a) v^2 - 2uv \geq 0 \quad \begin{pmatrix} 2\lambda - \varepsilon & -1 \\ -1 & 2a\lambda - \varepsilon a \end{pmatrix}$$

La forma quadratica è ≥ 0 se $2\lambda - \varepsilon > 0$ e

$$(2\lambda - \varepsilon)(2a\lambda - \varepsilon a) > 1 \quad 4a\lambda^2 + O(\varepsilon) > 1$$

Basta prendere $a = \frac{1}{\lambda^2}$ ed $\varepsilon > 0$ piccolo e la cosa funziona

In bella considero $E(t) := u^2(t) + \frac{1}{\lambda^2} v^2(t)$ e vedo che tutto funziona 😊.

Problema : cosa succede quando il sistema non è lineare ?

Esempio
$$\begin{cases} u' = \arctan u - \sin v \\ v' = \tan(u+2v) \end{cases}$$

L'origine è p.to stazionario ($u(t) = v(t) \equiv 0$ è soluzione)

È stabile ? È asint. stabile ?

Idea: linearizzo e spero che funzioni...

$$\begin{aligned} u' &= u - v \\ v' &= u + 2v \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

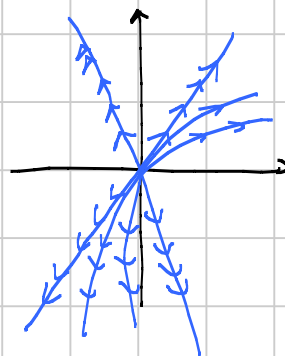
$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &> 0 \\ \text{Det}(A) &> 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ autovalori entrambi positivi $\Rightarrow$ asintotica instabilità

(cioè $u(t) \rightarrow 0$ e $v(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow -\infty$)

(se giro il tempo, cioè considero $u(-t)$ e $v(-t)$, allora la matrice cambia il segno degli autovalori)

Mi aspetto soluzioni



Teorema di linearizzazione

(enunciato brutale)

Sotto certe ipotesi le soluzioni del sistema non lineare si comportano come quelle del linearizzato.

Ipotesi: tutti gli autovalori del linearizzato hanno parte reale $\neq 0$.

— o — o —