

PROBLEMA DELLA STABILITÀ

Caso lineare

Consideriamo un sistema lin. omog. $U' = A U$
 $\uparrow$
 matrice $n \times n$ FISSA

L'origine è un p.to stazionario, nel senso che $A0 = 0$, quindi
 $U(t) \equiv 0$ è una soluz. del sistema
 $\uparrow$
 vettore

- Domande:
- ① Se $U(0)$ è vicino all'origine, la soluzione resta vicina all'origine per ogni $t \geq 0$?
 - ② Se $U(0)$ è vicino all'origine (o anche non vicino) è vero che $U(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$?

Oss. Il p.to (1) non è il te. di dipendenza continua dai dati perché lo chiedo per ogni $t \geq 0$.

Nel caso lineare si risponde risolvendo. Caso particolare 2×2 .
 Tutto dipende dalla forma canonica di A .

Caso 1: Autovalli reali e diagonalizzabile.

Siano λ e μ gli autovalli. Dopo aver diagonalizzato il sistema diventa

$$\begin{cases} u' = \lambda u \\ v' = \mu v \end{cases} \quad \begin{matrix} x^t \\ u(t) = u(0) e \\ v(t) = v(0) e^{\mu t} \end{matrix}$$

Il comportamento asintotico dipende dal segno di λ e μ .

- Se λ e μ sono < 0 , allora risp. si alla domanda ② (e anche alla ①)

- Se λ e μ sono ≤ 0 , allora risp. si alla domanda ①, ma non nec. alla ②.

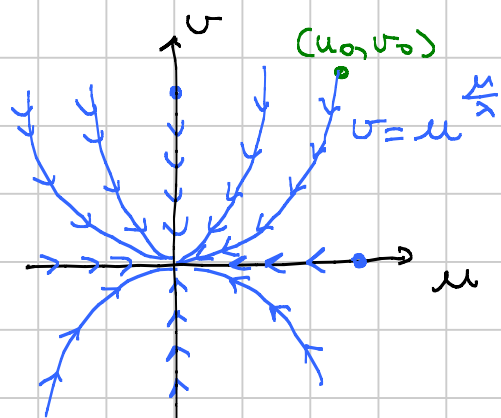
- Se λ opp. μ è > 0 , allora NO ad entrambe

Spazio delle fasi di un sistema = rappresentarle come curve in $\mathbb{R}^n$

Caso $\lambda < 0$ e $\mu < 0$

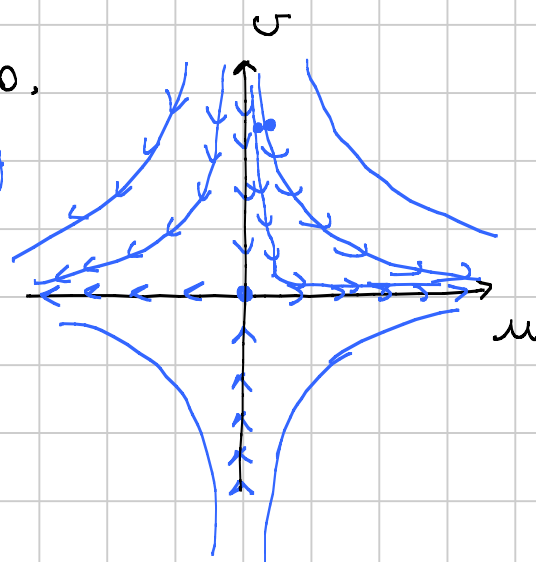
$$\begin{aligned} u_0 e^{+\lambda t} &= u \\ v_0 e^{+\mu t} &= v \end{aligned}$$

$$v = u^{\frac{\mu}{\lambda}} \quad (\text{interpretato se } u \text{ è negativo})$$



Se $\lambda > 0$ e $\mu > 0$ il disegno è lo stesso, ma le frecce sono al contrario.

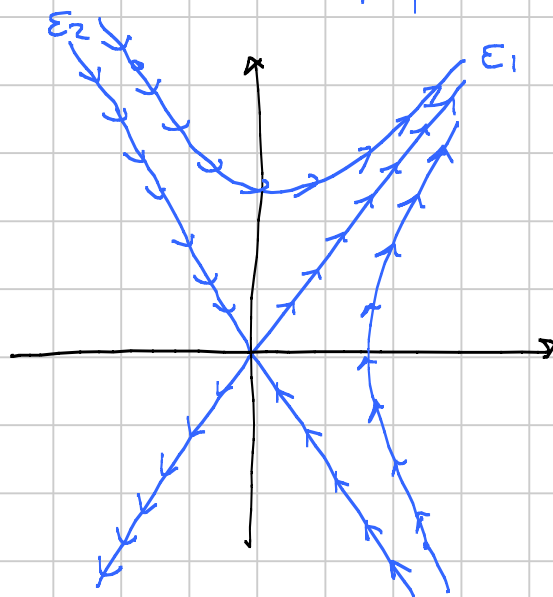
Se $\lambda > 0$ e $\mu < 0$ allo $v = u^{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \text{ neg}}$



I disegni valgono se la matrice è già diagonale, altrimenti c'è la distorsione lineare dovuta al cambio di variabili $\mathcal{M}$.

$$A \varepsilon_1 = \lambda \varepsilon_1 \quad \text{con } \lambda > 0$$

$$A \varepsilon_2 = \mu \varepsilon_2 \quad \text{con } \mu < 0$$



Caso 2 Autovalori complessi (veramente) coniugati $\alpha \pm i\beta$

La forma canonica (Jordan reale) è

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ e il sistema diventa}$$

$$u' = \alpha u + \beta v$$

$$v' = -\beta u + \alpha v$$

Potrei riportarlo ad una eq. di ordine 2, ma è comodo passare in coord. polari

$$\begin{cases} u(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ v(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases} \quad \text{Cosa risolvono } \rho \text{ e } \theta?$$

$$u' = \rho' \cos \theta - \rho \theta' \sin \theta = \alpha \rho \cos \theta + \beta \rho \sin \theta$$

1^a equ.

$$v' = \rho' \sin \theta + \rho \theta' \cos \theta = -\beta \rho \cos \theta + \alpha \rho \sin \theta$$

2^a equ.

$$\boxed{1^a \cdot \cos \theta + 2^a \sin \theta} \quad \rho' = \alpha \rho \quad \rho(t) = \rho(0) e^{\alpha t}$$

$$\boxed{1^a \cdot (-\sin \theta) + 2^a \cos \theta} \quad \cancel{\rho} \theta' = -\beta \cancel{\rho}$$

$$\theta' = -\beta \quad \theta(t) = \theta(0) - \beta t$$

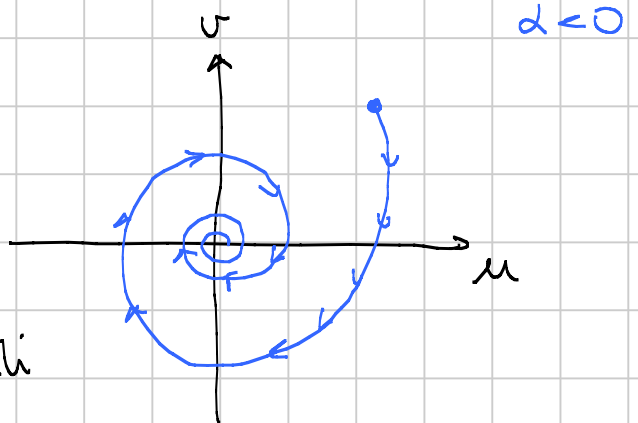
ho semplificato perché o $\rho(t) \equiv 0$ (e allora θ non è così importante) o $\rho(t) \neq 0 > 0$ sempre

Quindi in coord. polari ho

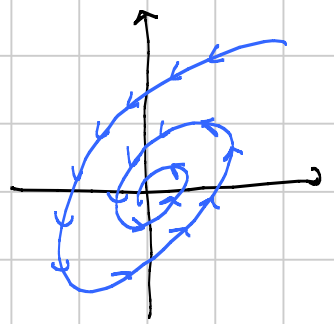
$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho(0) e^{\alpha t} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \rho \text{ cresce / decresce} \\ \text{a seconda del} \\ \text{segno di } \alpha \end{array} \\ \theta(t) &= \theta(0) - \beta t \quad \uparrow \\ &\quad \theta \text{ ruota} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ le traiettorie sono spirali
entranti o uscenti a
seconda del segno di α

⊙) Ⓞ) dipende da come
ho scelto le variabili



Nelle variabili originarie è tutto "storto"



Quindi

- la domanda ② ha risp. sì se $\alpha < 0$
- " " ④ ha risp. sì se $\alpha \leq 0$
(per $\alpha = 0$ le traiettorie sono cerchi / ellissi)

Caso 3 Non diagonalizzabile: forma canonica $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} u' = \lambda u + v \\ v' = \lambda v \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(t) = \lambda u + v(0) e^{\lambda t} \\ v(t) = v(0) e^{\lambda t} \end{cases} \rightsquigarrow u(t) = c e^{\lambda t} + d t e^{\lambda t}$$

↑
si determina

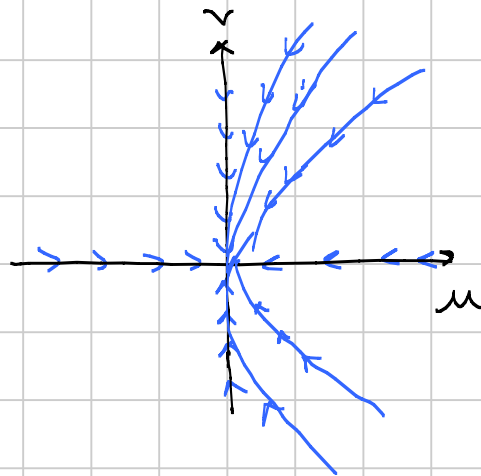
Quindi

- la domanda ② ha risposta sì se $\lambda < 0$ e no altrimenti
- la domanda ④ è più complicata ($\lambda = 0$ va sempre male a meno che non venga $d = 0$)

Per $\lambda < 0$ le traiettorie sono

$$u = \varphi(v)$$

$$\text{con } \varphi(x) = kx + R x \log x$$



Teorema generale (Valido per un sistema $n \times n$) $U' = A U$

La risposta alla domanda ② è sì $\Leftrightarrow$ tutti gli autov. hanno parte reale < 0

La risposta alla domanda ④ è sì $\Leftrightarrow$ tutti gli autov. hanno parte reale ≤ 0 e quelli con parte reale $= 0$ hanno mult. $= 1$.