

# SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Oss. 1 Un sistema di eq. diff. di ordine qualunque si può sempre ridurre ad un sist. di eq. di ordine, a patto di aumentare il numero di incognite  
 $\rightarrow$  teo. di esistenza / unicità generali si applicano

Oss. 2 Per i sistemi lineari, si può fare il contrario, cioè sistema  $\rightarrow$  eq. singola di ordine superiore

Esempio  $\begin{cases} u' = 7u - v \\ v' = 5u + v \end{cases}$  Voglio trovare un'eq. di ordine 2 nella variabile  $u$

Derivo 1<sup>a</sup>:  $u'' = 7u' - v' = 7u' - 5u - v = 7u' - 5u + u' - 7u$   
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$   
 $\quad \quad \quad v' \text{ dalla 2<sup>a</sup>} \quad \quad v \text{ dalla 1<sup>a</sup>}$

$$u'' - 8u' + 12u = 0 \quad x^2 - 8x + 12 = 0 \quad (x-2)(x-6) = 0$$

$$u(t) = a e^{2t} + b e^{6t} \quad \rightarrow \quad v(t) = 7u(t) - u'(t) = \dots \text{conto.}$$

$\uparrow$   
1<sup>a</sup> eq.

Un sistema lineare omogeneo si può scrivere in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \overset{A}{\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$U' = AU$$

Gli autovalori della matrice  $A$  sono  $\lambda = 2$  e  $\lambda = 6$

# Teoria generale dei sistemi di $n$ equazioni di evoluzione lineari a coeff. costanti omogenee

$$U' = A U$$

↑  
matrice  $n \times n$   
↑  
vettore

Supponiamo che  $A$  sia diagonalizzabile

$$A = M^{-1} D M$$

↑  
invertibile  
↑  
diagonale

$$U' = M^{-1} D M U \rightsquigarrow M U' = D M U$$
$$(M U)' = D (M U)$$

↑  
 $M$  è costante

Posto  $V = M U$ , il sistema diventa

$$V' = D V \rightsquigarrow \text{sistema disaccoppiato (sistema FINITO)}$$

$$V = (v_1, \dots, v_n) \quad D = \text{diagonale con } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ sulla diagon.}$$

$$v_1' = \lambda_1 v_1 \rightsquigarrow v_1(t) = v_1(0) e^{\lambda_1 t}$$

$$v_2' = \lambda_2 v_2$$

⋮

$$v_n' = \lambda_n v_n$$

Una volta noto il vettore  $V(t)$  posso ricavarne

$$U(t) = M^{-1} V(t)$$

In conclusione, supponendo  $A$  diagonalizzabile con autov.  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  e rispettivi autovettori  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , cioè

$$A \varepsilon_i = \lambda_i \varepsilon_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

La soluzione generale è data dalla formula

$$U(t) = c_1 \varepsilon_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n \varepsilon_n e^{\lambda_n t}$$

↑  
autovettori

↑  
autovalori

$c_1, \dots, c_n$  si determinano con i dati iniziali

Esponeziale di una matrice = Altro modo di scrivere la stessa cosa.

Def. Data una matrice  $A_{n \times n}$ , si definisce

$$\boxed{e^A} = I + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots + \frac{1}{n!} A^n + \dots$$

$\uparrow$  matrice       $\uparrow$  identità  
serie di matrici

Auràbbe verificato che la serie converge, e si può fare in tanti modi, ad esempio

→ lo spazio delle matrici è uno spazio vettoriale con una norma, ad esempio

$$\|M\| = \left( \sum_{i,j} M_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

→ Questa norma lo rende completo (così come qualunque altra norma, visto che sono tutte equivalenti)

per una norma qualunque

→ Se uno dimostra che  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ , allora per induzione

$$\|M^k\| \leq \|M\|^k$$

→ A questo punto la serie delle norme converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|M^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|M\|^k}{k!} = e^{\|M\|} < +\infty$$

→ Per un fatto generale sulle serie negli spazi vettoriali anche la serie delle matrici converge.

Oss. Se  $A$  è diagonale, allora  $e^A$  è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Prop. Se  $A$  è diagonalizzabile, cioè  $A = M^{-1} D M$   
allora  $e^A = M^{-1} e^D M$   
↑  
diagonale

Dim. Basta osservare che le potenze commutano con il cambio di base

$$A = M^{-1} D M \quad \leadsto \quad A^k = M^{-1} D^k M$$

e con le somme, quindi

$$\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = M^{-1} \left( \sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!} \right) M$$

Basta ora fare il limite per  $n \rightarrow +\infty$ .

Oss. Tutto funziona uguale anche se  $A$  è diagon. in  $\mathbb{C}$

Oss. Quando  $A$  non è diagon. posso comunque usare la forma canonica di JORDAN e semplificare di molto il conto

Equazioni :  $u' = a u \quad \leadsto \quad u(t) = u(0) e^{at}$

Sistemi :  $U' = A U \quad \leadsto \quad U(t) = e^{A t} U(0)$

↑ ↑ ↑  
vettore matrice vettore

Dim. È praticamente (nel caso diagon.) quella fatta prima.

Achtung!  $e^{A+B} \stackrel{?}{=} e^A \cdot e^B$

↑  
NI: è vero solo se A e B commutano

Brutal mode  $e^A \cdot e^B = \left( I + A + \frac{A^2}{2} + \dots \right) \left( I + B + \frac{B^2}{2} + \dots \right)$

$$= I + A + B + \frac{B^2}{2} + AB + \frac{A^2}{2}$$

potenze 0 - ordine  
esponente 1  
esponente 2

$$\frac{1}{2} (B^2 + 2AB + A^2) = \frac{1}{2} (A+B)^2$$

↑  
NO:  $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + \underbrace{AB + BA}_{\substack{\text{se commutano} \\ \hat{=} 2AB}}$

Achtung!  $\left[ e^{A(t)} \right]' \stackrel{?}{=} A'(t) e^{A(t)}$  anche questa in generale non è vera...

Funziona solo che  $\left[ e^{At} \right]' = A e^{At}$

Volevamo:  $e^{A(t_0+R)} - e^{A t_0} = e^{A t_0} \cdot e^{AR} - e^{A t_0}$

↑  
ok perché  
 $t_0 A$  e  $R A$   
commutano

$$= e^{A t_0} (e^{AR} - I)$$

Ora si tratta di mostrare che  $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{e^{AR} - I}{R} = A$

ma questo si fa, volevamo derivando per serie

$$\frac{e^{AR} - I}{R} = \frac{\cancel{I} + RA + \frac{1}{2} A^2 R^2 + \dots - \cancel{I}}{R} \rightarrow A.$$