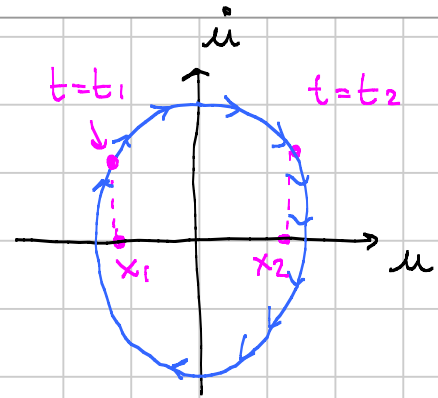


Back to esempio precedente $\ddot{u} = -u^3$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = c$$



Domanda: ritorna su se stessa?

Nel tratto alto $\dot{u} = \sqrt{2c - \frac{1}{2}u^4}$, quindi
 ↑ segno +

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{2c - \frac{1}{2}u^4(t)}} = 1 \quad \text{integro tra } t_1 \text{ e } t_2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \dots = t_2 - t_1$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{u'(t)}{\sqrt{\dots}} dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2c - \frac{1}{2}x^4}} = t_2 - t_1$$

↑
 $x = u(t)$ ↑
 limitato indip. da x_1 e x_2

L'integrale al max vale

$$\int_{-\sqrt[4]{4c}}^{\sqrt[4]{4c}} \frac{dx}{\sqrt{2c - \frac{1}{2}x^4}} < +\infty$$

integrale improprio convergente
 perché c'è una radice quadrata
 (analisi 1)

Ad esempio per $c = \frac{1}{4} \rightsquigarrow \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

↑
 in $x=1$ è il
 colpevole dell'int.
 improprio

Conclusione: le soluzioni sono periodiche
 con periodo

$$2 \int_{-\sqrt[4]{4c}}^{\sqrt[4]{4c}} \frac{dx}{\sqrt{2c - \frac{1}{2}x^4}}$$

Back to esempio 1

$$\ddot{u} = -u \leadsto \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2 = C$$

$$\leadsto \dot{u}^2 + u^2 = C$$

$$\dot{u} = \sqrt{C - u^2}$$

$$T = 2 \int_{-\sqrt{C}}^{\sqrt{C}} \frac{dx}{\sqrt{C - x^2}}$$

Pongo $x = \sqrt{C} y$ $dx = \sqrt{C} dy$

$$= 2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{C} dy}{\sqrt{C - Cy^2}}$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$= 2\pi$$

= π (primitiva è arcsin)

Oss. importante: il periodo non dipende da C

Stesso conto con $\ddot{u} = -u^3$

$$T = 2 \int_{-\sqrt[4]{4C}}^{\sqrt[4]{4C}} \frac{dx}{\sqrt{2C - \frac{1}{2}x^4}}$$

Pongo $x = \sqrt[4]{2C} y$
 $dx = \sqrt[4]{2C} dy$

$$= 2 \int_{-1}^1 \frac{\sqrt[4]{2C} dy}{\sqrt{2C - 2C y^4}}$$

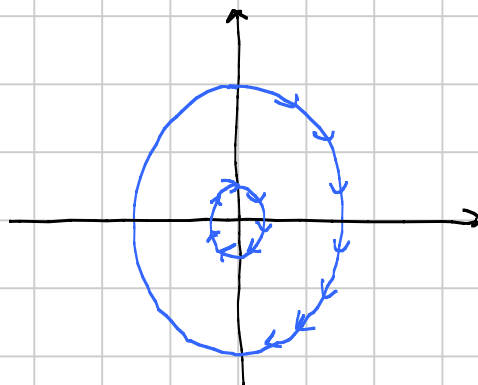
$$= 2 \frac{\sqrt[4]{2C}}{\sqrt[4]{2C}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[4]{C}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}}$$

$\Rightarrow$ Più il livello energetico è alto, più il periodo è breve
Inoltre il periodo tende a ∞ quando il livello energetico
va a 0.

$$\ddot{u} = -u^3$$

↑
più siamo su un
livello basso, più
la forza di richiamo
è debole



Esempio 4 $u'' = u^3$

$$u \ddot{u} = u^3 \dot{u}$$

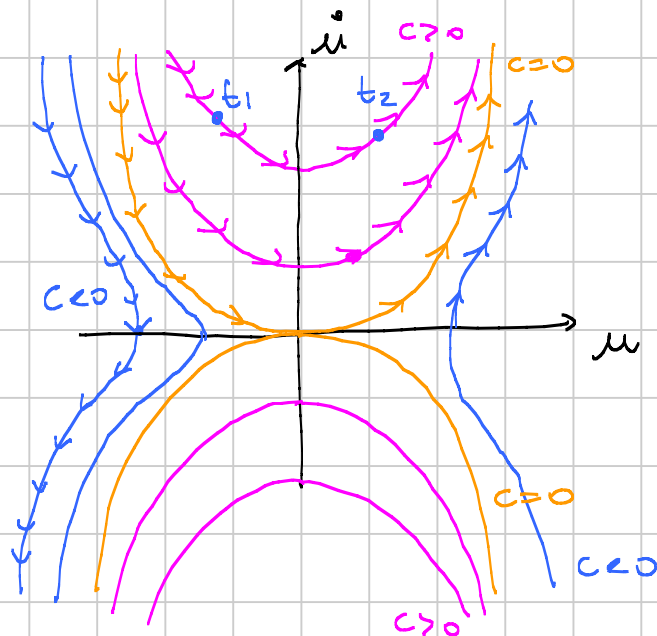
$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[\frac{1}{4} u^4 \right]'$$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 - \frac{1}{4} u^4 = C$$

Ora le soluzioni stanno sulle linee di livello di $E = \frac{1}{2} \dot{u}^2 - \frac{1}{4} u^4$

$$\dot{u} = \pm \sqrt{2C + \frac{1}{2} u^4}$$

Mettiamo di essere con $C > 0$
e $\dot{u} > 0$. Questo ci dice
che fino a quando la
soluzione esiste avrà
 $u'(t) > 0$ e quindi sarà
monotona crescente



$$u'(t) = \sqrt{2C + \frac{1}{2} u^4}$$

e queste di sicuro hanno blow-up in tempo finito
(sono crescenti e RHS ha crescita quadratica all'infinito)

Posso anche stimare il tempo di blow-up. Supponiamo di
avere $u(t_0) = u_0$

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{2C + \frac{1}{2} u^4}} = 1$$

$$\int_{t_0}^T \frac{u'(t)}{\sqrt{2C + \frac{1}{2} u^4}} dt = T - t_0$$

$$+\infty \rightarrow u(\tau) \quad \int_{u_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2C + \frac{1}{2} x^4}} = T - t_0$$

$$\int_{u_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2C + \frac{1}{2} x^4}} \text{ converge} = T - t_0$$

↑
tempo di blow-up

Esempio (Pendolo) $\ddot{u} = -\sin u$ $\ddot{u} \dot{u} = -\sin u \cdot \dot{u}$
 $\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = [\cos u]'$

$$E(t) = \frac{1}{2} \dot{u}^2(t) - \cos u(t) = E(0) \text{ costante}$$

per u piccolo è
 $\sim \frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{2} u^2$

Come sono fatti i livelli di E ?

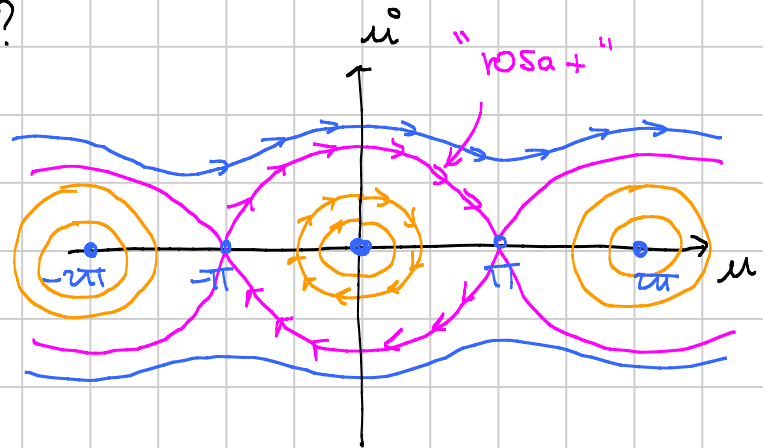
$$E(0) = -1$$

$$E(0) \in (-1, 1)$$

$$E(0) = 1$$

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 = 1 + \cos u$$

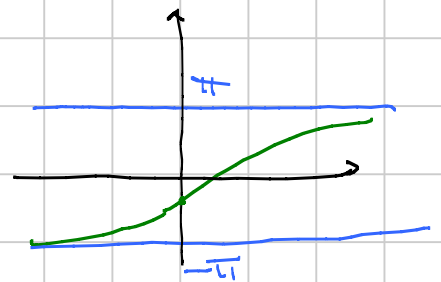
$$\dot{u} = \pm \sqrt{2(1 + \cos u)}$$



$$E(0) > 1$$

Esercizio 1: mostrare che la soluzione "rosa+" tende a $\pm\pi$ per $t \rightarrow \pm\infty$

$$u'(t) = \sqrt{2(1 + \cos u)}$$



Domanda: come dipende il periodo
 delle soluz. periodiche dal livello energetico
 (direi che aumenta, verificare con l'int. improprio)