

Equazioni diff. di ordine 2

→ Spazio delle fasi

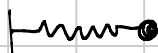
→ Metodi energetici

Esempio classico

$$u'' = -u$$

(più in gen. $u'' = -ku$ con $k > 0$)

Oscillatore armonico

 $|u|$ = distanza dal p.to di equilibrio

$$u(t) = a \sin t + b \cos t$$

$$u(t) = a \sin(\sqrt{k}t) + b \cos(\sqrt{k}t)$$

Tutte le soluzioni sono periodiche con lo stesso periodo.

Oss. $u_1 = \sin t$

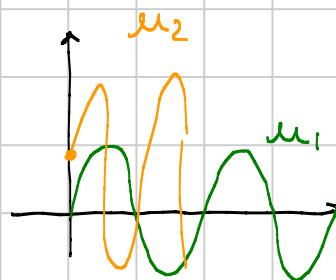
$u_1(0) = 0$

$u_1'(0) = 1$

$u_2 = 3 \sin t + \cos t$

$u_2(0) = 1$

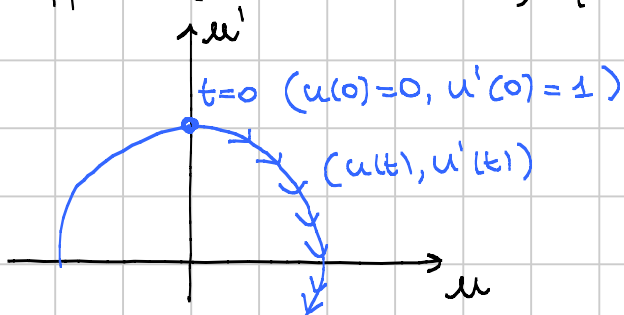
$u_2'(0) = 3$

Non è vero che $u_2(t) \geq u_1(t)$ per ogni $t \geq 0$ Quindi: ADDIO TEO. CONFRONTO

Achtung! Il fatto che le soluzioni si incrocino NON è una violazione di unicità: basta che si incrocino con derivata diversa.

SPAZIO DELLE FASI

Che cosa descrive lo stato del sistema?

La coppia $(u(t), u'(t))$, quindi 1 p.to nel piano

$$u(t) = \sin t$$

$$u'(t) = \cos t$$

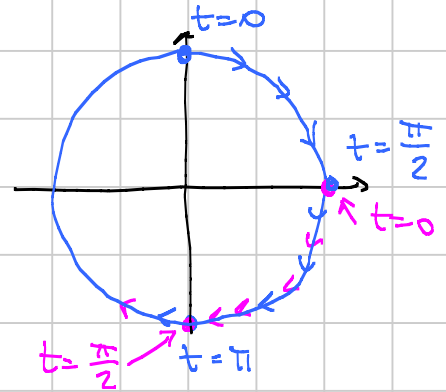
Descrizione nello spazio delle fasi: disegnare la curva $(u(t), u'(t))$ al variare di t dove la soluz. è definita

Teo. unicità: curve relative a soluz. diverse non possono passare per lo stesso p.to allo stesso tempo.

Possono passare per lo stesso p.to a tempi diversi

$$u(t) = \sin t \quad \rightsquigarrow (\sin t, \cos t) \quad \blacksquare$$

$$u(t) = \cos t \quad \rightsquigarrow (\cos t, -\sin t) \quad \blacksquare$$



Nello spazio delle fasi percorrono la stessa curva sfasate di $\frac{\pi}{2}$.

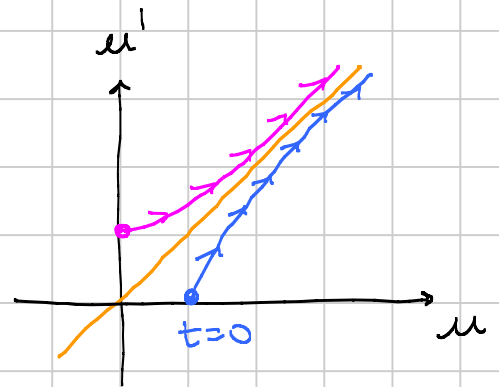
Esempio 2 $u'' = u$

$$u(t) = a \sinh t + b \cosh t$$

$$u(t) = \cosh t \rightsquigarrow (\cosh t, \sinh t)$$

$$u(t) = \sinh t \rightsquigarrow (\sinh t, \cosh t) \quad \blacksquare$$

la soluz. non è periodica



In generale un'eq. di ordine 2 si presenta come

$$\begin{cases} u'' = f(t, u, u') \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \end{cases}$$

Si può riscrivere come sistema

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = f(t, u, v) \end{cases}$$

$$F(t, u, v)$$

$$F: \underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{(u,v)}{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Un'ipotesi del tipo

$$|f(t, u, v)| \leq \underset{\uparrow A(t)}{A} + \underset{\uparrow B(t)}{B}|u| + \underset{\uparrow C(t)}{C}|v|$$

$$\forall (t, u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$$

garantisce l'esistenza globale

Esempio 3 $u'' = -u^3 \leftarrow$ RHS non verifica hp per esistenza globale

Metodo energetico: moltiplico LHS e RHS per $\dot{u}$:

$$\ddot{u} = -u^3 \quad \leadsto \quad \underset{''}{\dot{u}} \underset{''}{\dot{u}} = - \underset{''}{u^3} \dot{u}$$

$$\left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[-\frac{1}{4} u^4 \right]'$$

$$\leadsto \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 \right]' = 0$$

$$\leadsto \frac{1}{2} \dot{u}^2(t) + \frac{1}{4} u^4(t) = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}^2(0) + \frac{1}{4} u^4(0)}_{\text{costante che dipende solo dalle cond. iniz.}}$$

$\forall t$ per cui
la soluz.
esiste

Definisco $E(t) := \frac{1}{2} \dot{u}^2(t) + \frac{1}{4} u^4(t)$ (energia del sistema)

e ho dimostrato che $E(t) = E(0)$ per ogni t per cui la soluz. esiste.

Oss. Il metodo vale in generale per eq. del tipo

$$\boxed{u'' = f(u)}$$

$\uparrow$ dipende solo da u , non da t o $\dot{u}$

$$\dot{u} \ddot{u} = f(u) \dot{u} \quad \leadsto \quad \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = [F(u)]' \quad F = \text{prim. di } f$$

$$E(t) := \frac{1}{2} \dot{u}^2 - F(u) \quad \leadsto \quad E'(t) = 0$$

$\leadsto E(t)$ è costante lungo le soluzioni

— o — o —

Nell'esempio di partenza

$$\ddot{u} = -u \leadsto \ddot{u} \dot{u} = -u \dot{u} \\ \left[\frac{1}{2} \dot{u}^2 \right]' = \left[-\frac{1}{2} u^2 \right]'$$

$$E(t) = \frac{1}{2} (\dot{u}^2 + u^2) \leadsto \text{le soluzioni verificano}$$

$$\dot{u}^2 + u^2 = \text{costante}$$

Nello spazio delle fasi stanno su una circ. il cui raggio dipende da $E(0)$, cioè dal "livello energetico"

Back to esempio 3

$$\underbrace{\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4}_{E(t)} = \text{cost.}$$

Conseguenza 1: $u(t)$ e $\dot{u}(t)$ sono limitate (le potenze al RHS sono pari), quindi non può esserci blow-up

Achtung! Per le equazioni di ordine 2 blow up si ha quando

$$\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| + |u'(t)| = +\infty$$

Quindi nell'esempio 3 c'è esistenza globale per ogni dato iniziale !! (Break down non può esserci perché il RHS dell'eq. è sempre definito)

Conseguenza 2: in un certo senso l'equazione è diventata di ordine 1.

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = c \quad \dot{u}^2 = c - \frac{1}{2} u^4$$

$$\dot{u} = \pm \sqrt{c - \frac{1}{2} u^4}$$

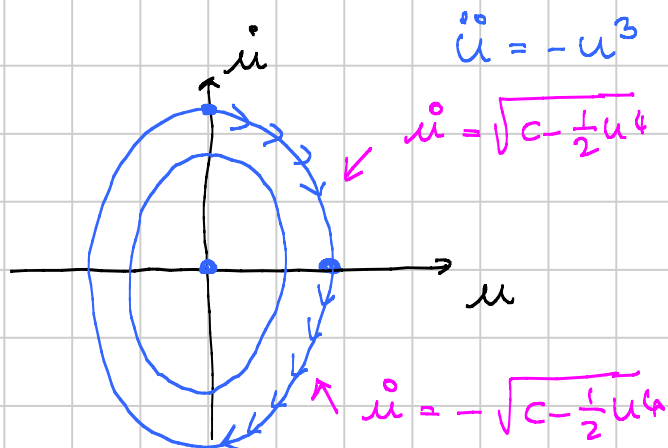
↑
posso scegliere sulla base del dato iniziale

↪ almeno teoricamente posso risolvere esplicitamente

Conseguenza 3 : so su quale curva "vivono" le soluzioni

Le linee di livello dell'energia sono le curve su cui stanno le soluzioni

$$\frac{1}{2} \dot{u}^2 + \frac{1}{4} u^4 = C$$



Domanda: le soluzioni sono periodiche, cioè prima o poi torno al p.to di partenza?

Per quanto ne sappiamo ora, potrebbero percorrere anche solo un tratto!

— o — o —