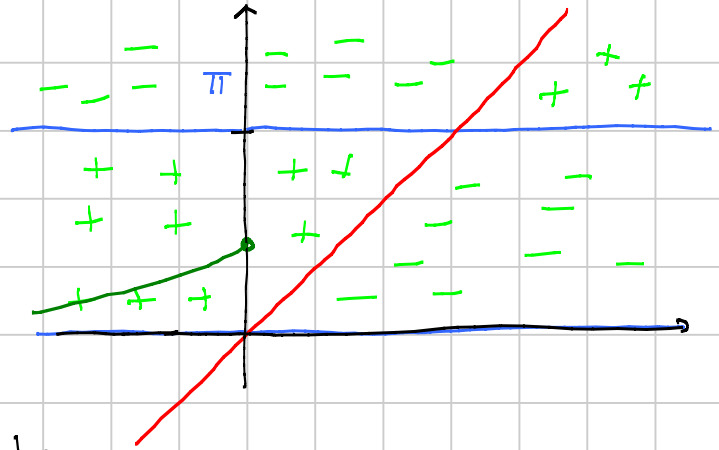


Esempio 1
$$\begin{cases} u' = \frac{\sin u}{u-t} \\ u(0) = \alpha \in (0, \pi) \end{cases}$$



FATTO 1 $u(t) \equiv \pi$ è soluz. per $t < \pi$

$u(t) \equiv 0$ è soluz. per $t < 0$ e per $t > 0$

FATTO 2 Per $t \leq 0$ la soluzione esiste globalmente (il blow-up è escluso dalla barriera $u(t) \in [0, \pi]$, il break down non ci può essere).
La sol. è monotona e tende ad un limite $l \in [0, \alpha]$

Non basta il teo. dell'asintoto per escludere $l \neq 0$. Dipende dal fatto che al denominatore c'è solo t , quindi sarebbe

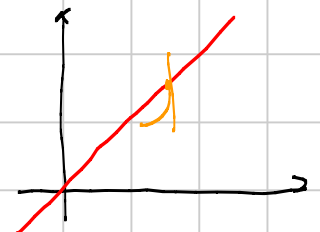
$u' \sim \frac{\sin l}{l-t}$ $\uparrow$ integrale divergente, ma ci torneremo dopo.
onibile

FATTO 3 Per $t \geq 0$ c'è la FOSSA COMUNE in π , cioè tutte le soluzioni hanno tempo di vita $= \pi$ e tendono a π

È chiaro che $u(t) < \pi$ finché esiste (altrimenti c'è violazione di unicità)



È intuitivamente chiaro che u non può toccare il rosso prima di $t = \pi$ perché dovrebbe farlo con derivata $+\infty$ e dall'alto non è possibile



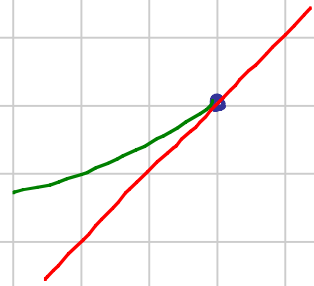
Formalizz. 1

Sia T il tempo di vita. Per assunto sia $T < \pi$. Allora $u(t)$ è monotona in $[0, T)$, quindi ha limite per $t \rightarrow T^-$ e questo limite vale T .

Scrivo il rapporto incrementale su T :

$$\frac{u(T-R) - u(T)}{-R} = \frac{u(T-R) - T}{-R} \leq \frac{T-R-T}{-R} = 1$$

$u(t) \geq t$ e
denom. neg., quindi
si gira



D'altra parte

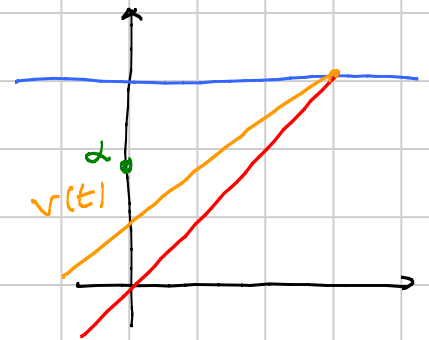
$$\frac{u(T-R) - u(T)}{-R} = u'(t(R)) = \frac{\sin u(t(R))}{u(t(R)) - t(R)}$$

$\downarrow +\infty$ $\uparrow \sin T$
 $\downarrow 0+$

Formalizz. 2

Prendo $v(t) := \pi + (1-\varepsilon)(t-\pi)$

$\uparrow$ retta per (π, π) con coeff.
angolare $= 1-\varepsilon$



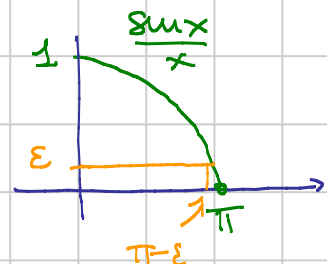
Spero che sia sottosoluz.

$$v'(t) \leq \frac{\sin v(t)}{v(t) - t}$$

$$1-\varepsilon \stackrel{?}{\leq} \frac{\sin(\pi + (1-\varepsilon)(t-\pi))}{\pi + (1-\varepsilon)(t-\pi) - t} = \frac{\sin((1-\varepsilon)(\pi-t))}{\varepsilon(\pi-t)}$$

$$\varepsilon \stackrel{?}{\leq} \frac{\sin((1-\varepsilon)(\pi-t))}{(1-\varepsilon)(\pi-t)} = \frac{\sin x}{x}$$

con $x \in [0, (1-\varepsilon)\pi]$



Basta controllare che

$$\varepsilon \leq \frac{\sin((1-\varepsilon)\pi)}{(1-\varepsilon)\pi} \dots$$

BACK TO FATTO 2

Come dimostro che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$?

Fare disug. per $t \leq 0$ è una pena !! Giro il problema: pongo

$v(t) := u(-t)$. Cosa risolve?

$$v'(t) = -u'(-t) = -\frac{\sin u(-t)}{u(-t) - (-t)} = -\frac{\sin v(t)}{v(t) + t}$$

$$v' = -\frac{\sin v}{v+t}$$

Supponiamo che $v(t) \rightarrow l > 0$. Allora

$\sin v \geq \sin l$, quindi

↑ vale se $0 < l \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, ma ci si riduce facilmente a questo caso

$$\frac{\sin v}{v+t} \geq \frac{\sin l}{\pi+t} \quad \text{quindi} \quad v'(t) \leq -\frac{\sin l}{\pi+t}, \text{ quindi}$$

$$v(t) = v(0) + \int_0^t v'(s) ds \leq v(0) - \underbrace{\int_0^t \frac{\sin l}{\pi+s} ds}_{\rightarrow -\infty}$$

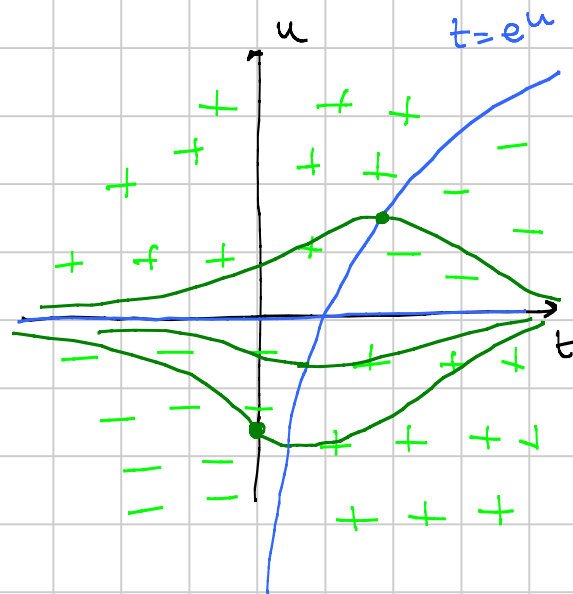
$\rightarrow -\infty$ e quindi $v(t) \rightarrow -\infty$ che è assurdo

— o — o —

Esempio 2 $\begin{cases} u' = u \arctan(e^u - t) \\ u(0) = d \end{cases}$

$u(t) \equiv 0$ è soluz.

$d < 0$ Tutto standard e $u(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \pm \infty$ (teo. asintoto)



Oss. Dall'inizio posso dire che c'è sempre esistenza glob. poiché

$$|f(t, u)| \leq \frac{\pi}{2} |u| \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

- $\alpha > 0$
- tocca e scende (ci sono, basta partire dalla curva)
 - non tocca mai

Dico che ce esistono che non toccano mai.

Provo a vedere se $v(t) = t + k$ è sottosoluz.

$$v'(t) \leq v(t) \arctan(e^{v(t)} - t)$$

"

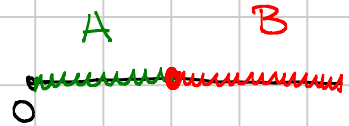
$$1 \leq \underbrace{(t+k)}_{\geq k} \arctan(\underbrace{e^{t+k} - t}_{\text{funzione cresc. (se } k \geq 0), \text{ quindi } \geq e^k})$$

Quindi basta che $1 \leq k \arctan(e^k)$
il che per k grande è vero.

Visto che la sottosoluz. non tocca, allora anche le soluz. che partono sopra non toccano.

$A = \{ \alpha > 0 : \text{la soluz. tocca} \}$

$B = \{ \alpha > 0 : \text{la soluz. non tocca} \}$



Il separatore sta in B perché A è aperto

Idea: $\rightarrow$ le soluzioni con $\alpha \in \text{Int}(B)$ vanno a $+\infty$ esponenzialmente

$\rightarrow$ la soluzione corrispondente a $\sup B = \sup A$ va a $+\infty$ logaritmicamente

Esercizio: dimostrarlo !!!!! (Esiste unica soluz. t.c.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u(t)}{\log t} \in \mathbb{R}).$$

— 0 — 0 —