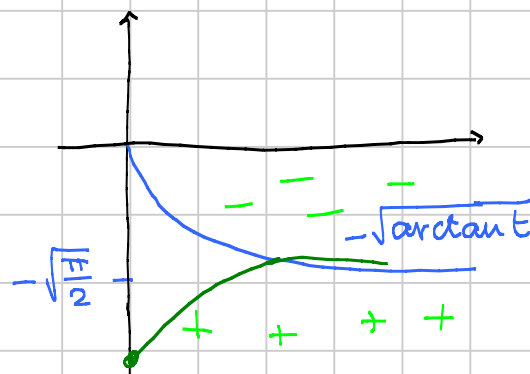


Cont. esempio precedente

$$\begin{cases} u' = u^2 - \arctan t \\ u(0) = 2 \end{cases}$$



Domanda: è vero che per $\alpha < 0$ tutte le solms.
toccano la linea $u = -\sqrt{\alpha \tan t}$

Sr! Se non toccassero, sarebbero monotone $\nearrow$, quindi $u \leq -\sqrt{\frac{E}{2}}$
per ogni $t \geq 0$, quindi

$$u'(t) = u^2(t) - \arctan t \geq \frac{\pi}{2} - \arctan t \quad \arctan \frac{1}{s} \sim \frac{1}{s}$$

da cui $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds \geq \alpha + \underbrace{\int_0^t \left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right) ds}_{\text{diverge } \alpha + \infty \text{ per } t \rightarrow +\infty}$

quindi non è possibile che $u(t) \rightarrow -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 - t^2 \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ (sarebbe uguale $u^2 - t^4$)

Caso 1: $\alpha < 0, t \geq 0$ La sol. sale
finché tocca $u = -t$ e poi resta
nel triangolo $\Leftarrow$, formalmente
perché

$v(t) := t$ è soluzione.

$$v^1(t) \geq v^2(t) - t^2$$

111

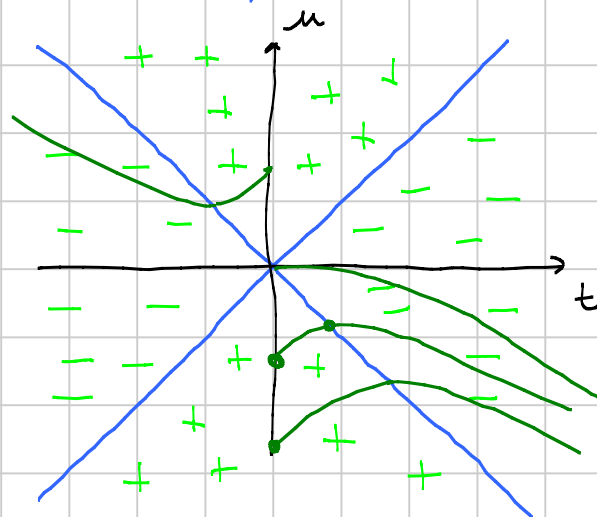
110

e $v(t) := -t$ è sottosoluz.

$$v'(t) \leq v^2(t) - t^2$$

- 1

190



A quel punto c'è esistenza globale e $u(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$
 (il limite esiste per monotonia, se $u(t) \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora $u'(t) \rightarrow l^2 - \infty = -\infty$, contro tes. asintoto).

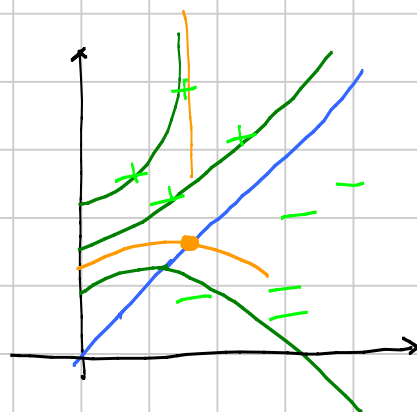
Caso 2: $\alpha > 0, t \geq 0$ Ci sono 3 opzioni

- tocca e poi decresce
- sta sopra ed esiste globalmente
- sta sopra e ha blow-up

Fissiamo notazione

$$A = \{\alpha > 0 : \text{tocca e decresce}\}$$

$$B = \{\alpha > 0 : \text{ha blow-up}\}$$



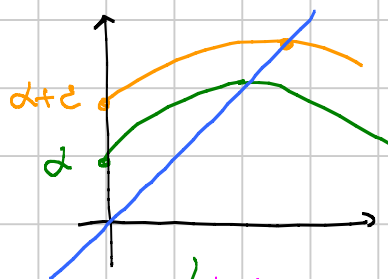
Fatto 1 $A \neq \emptyset$: basta partire sulla bisettrice e tornare indietro

Fatto 2 Se $\alpha \in A \Rightarrow$ ogni $\alpha' \leq \alpha$ sta ancora in A (banale)

Inoltre A è aperto, cioè se $\alpha \in A$, allora esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subseteq A$.

Basta dim. che $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\alpha + \varepsilon \in A$.

Basta partire sulla bisettrice un po' più in là

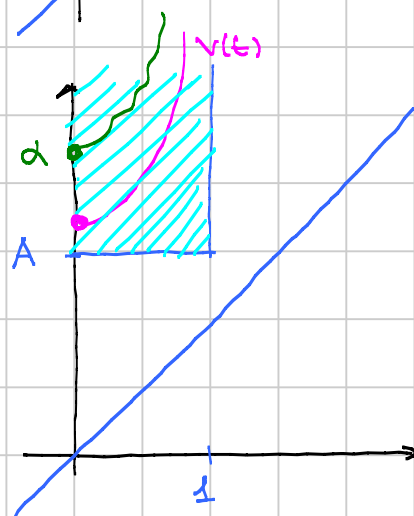


Fatto 3 $B \neq \emptyset$

Considero l'insieme (dato $A > 2$)

$$\Omega = \{(t, u) : t \in [0, 1], u \geq A\}$$

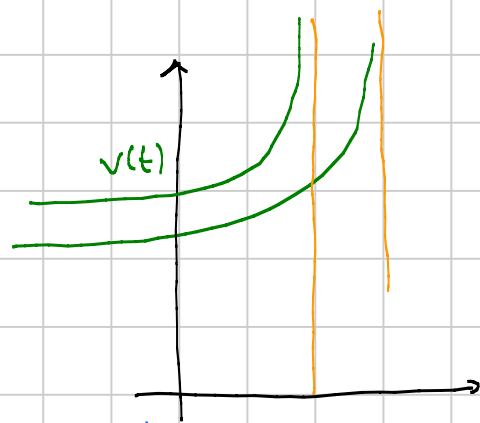
$$u^2 - t^2 \geq u^2 - 1 \quad \forall (t, u) \in \Omega$$



Considero l'eq. $v' = v^2 - 1$. Le soluzioni di questa con dato > 1 hanno blow-up. Inoltre è un problema autonomo, quindi le soluzioni sono tutte traslate della stessa.

CONSEGUENZA Esiste una soluzione di $v' = v^2 - 1$ con dato $v(0) > 1$ che ha blow up prima di $T=1$.

Ora questa $v(t)$ è sottosoluz. del vostro problema, quindi tutte le $u(t)$ che partono sopra devono avere blow-up prima di $T=1$.



FATTO 4 Se $\alpha \in B$ e $\alpha' \geq \alpha$, allora $\alpha' \in B$ (banale)
Inoltre B è aperto.

Come prima basta dim. che per ogni $\alpha \in B$ esiste $\varepsilon > 0$ t.c.
 $\alpha - \varepsilon \in B$

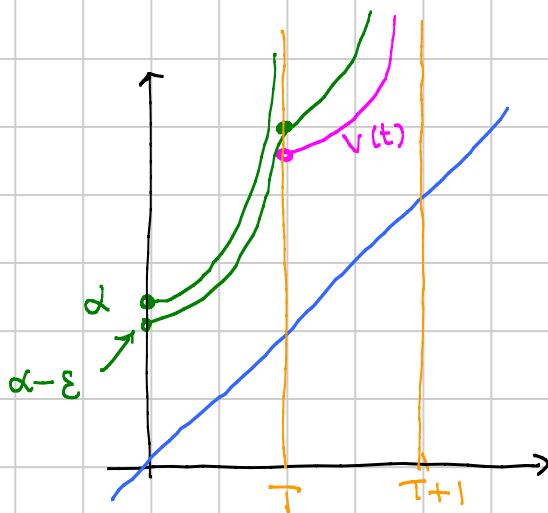
Considero la striscia $t \in [0, T+1]$.
Allora lì vale

$$u^2 - t^2 \geq u^2 - (T+1)^2$$

Considero il problema

$$\begin{cases} v' = v^2 - \underbrace{(T+1)^2}_{\text{costante}} \\ v(T) = v_0 \end{cases}$$

Punto fondamentale: se v_0 è abb. grande, allora $v(t)$ ha blow-up prima di $T+1$



Ora considero il problema $\begin{cases} u' = u^2 - t^2 \\ u(T) = u_0 > v_0 \end{cases}$

e questo ha la soluz. che

→ nel futuro ha blow up (prima di $T+1$)

→ nel passato passa per $t=0$ in un p.to sotto α

FATTO 5

$\sup A \leq \alpha \leq \inf B$: ogni α in questo range produce una soluz. che

→ non può toccare, quindi $u(t) > t$ per ogni $t \geq 0$

↑ perché A è aperto

→ non può avere blow up, quindi deve esistere globalmente

↑ perché B è aperto

Una volta che è ↗ ed esiste glob., tende a $+\infty$ (solita)

FATTO 6

La soluz. che si incanalata è unica. Supponiamo che ce ne siano 2: $u_1(t) < u_2(t)$.

Pongo $w(t) := u_2(t) - u_1(t)$.

Allora

$$\begin{aligned} w'(t) &= u_2'(t) - u_1'(t) = u_2^2 - t^2 - u_1^2 + t^2 \\ &= \underbrace{(u_2 - u_1)}_{\dot{w}} \underbrace{(u_2 + u_1)}_{\geq w} \end{aligned}$$

Quindi $w'(t) \geq w^2(t)$ con $w(0) > 0$, ma questo dice che $w(t)$ ha blow-up in tempo finito, il che non è vero.

— 0 — 0 —

Considerare tempi $t \leq 0$ equivale a considerare $t \geq 0$ con dato iniziale cambiato di segno

Detto bene: se $u(t)$ è soluzione, allora $-u(-t)$ è soluz.

Infatti, posto $v(t) := -u(-t)$ abbiamo

$$v'(t) = u'(-t) = u^2(-t) - (-t)^2 = [v(t)]^2 - t^2$$

→ stessa equazione, solo dato iniziale opposto $v(0) = -u(0)$.

FATTO $+\infty$

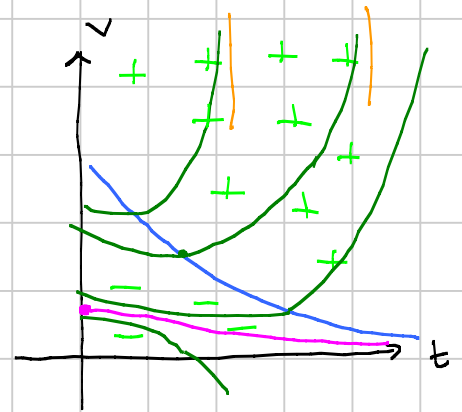
L'incanalatrice ha come asintoto obliquo la retta $u(t) = t$. Dico d'm. che $v(t) := u(t) - t$ tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$.

Vedo cosa risolve:

$$\begin{aligned}
 v'(t) &= u'(t) - 1 \\
 &= u^2 - t^2 - 1 \\
 &= (v+t)^2 - t^2 - 1 \\
 &= v^2 + 2tv + t^2 - t^2 - 1 \\
 &= v^2 + 2tv - 1
 \end{aligned}$$

Si tratta di risolvere $v' = v^2 + 2tv - 1$

La separatrice fra + e - è una curva che tende a 0



$$\begin{aligned}
 v(t) &= -t \pm \sqrt{t^2 + 1} \\
 &\nearrow -t + \sqrt{t^2 + 1} = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 1}} \\
 &\searrow \sim -2t
 \end{aligned}$$

— 0 — 0 —