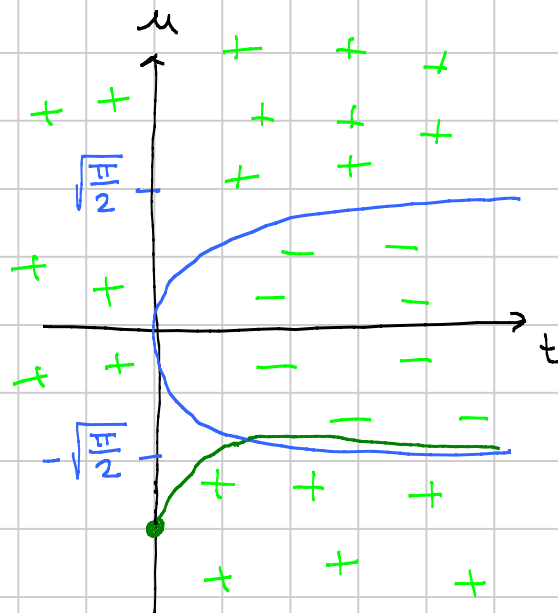


Studio qualitativo con valori soglia

Esempio 1 $\begin{cases} u' = u^2 - \arctan t \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Fatto 1 Esistenza e unicità locale
no problem

Fatto 2 $u'(t) \geq 0 \Leftrightarrow u^2 - \arctan t \geq 0$
 $\Leftrightarrow |u| \geq \sqrt{\arctan t}$
 quindi + e - come in figura.



Fatto 3 Se $\alpha < 0$ allora per $t \geq 0$, allora la sol. cresce, poi tocca la curva blu, e poi decresce esistendo globalmente, tendendo a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Dim. Perché tocca? Se non toccasse, sarebbe sempre crescente, quindi avrebbe un limite $l \in \mathbb{R}$, anzi $l \leq -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
 Ma allora

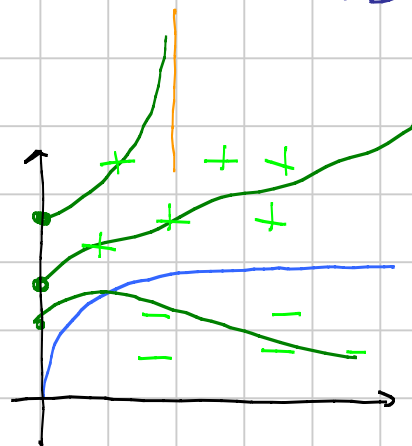
$$u' \rightarrow l^2 - \frac{\pi}{2}, \text{ il che sarebbe coerente se } l = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \dots$$

[Vediamo dopo (forse...)]

Fatto 4 Cosa può succedere per $\alpha > 0$?

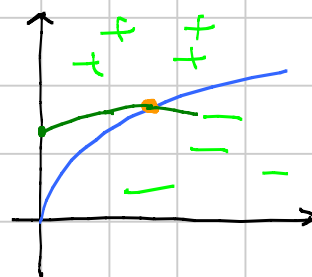
A sono almeno 3 possibilità

- tocca e poi scende
- esistenza globale restando sopra
- blow-up sopra



Fatto 4.1 Esistono valori $\alpha > 0$ per cui tocca.

Basta risolvere a partire dalla curva blu e trovare il minimo

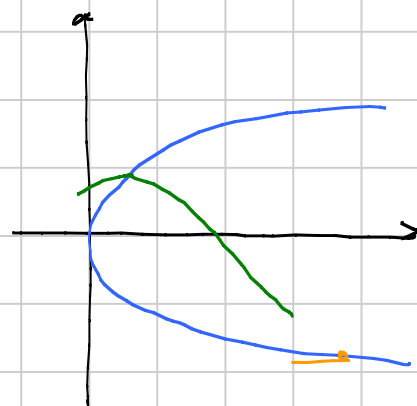


Fatto 4.2 Le soluzioni che toccano, poi restano dentro e decrescono tendendo a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Basta osservare che $v(t) := -\sqrt{\arctan t}$ è sottosoluzione per $t > 0$ (stretta)

$$\underbrace{v'(t)}_{< 0} \leq \underbrace{f(t, v(t))}_0$$

Analogamente $v(t) := \sqrt{\arctan t}$ è soprasol. stretta per $t > 0$



Una volta che sta nella zona $-$, $u(t)$ decresce e tende a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

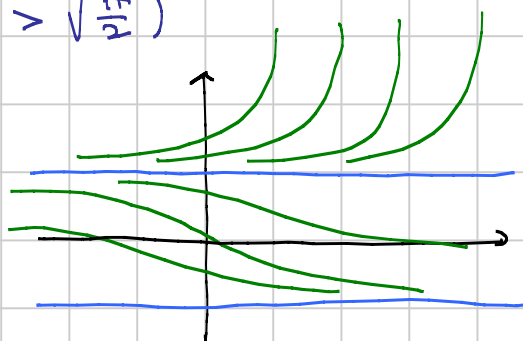
Fatto 4.3 Se per un certo $\alpha > 0$ la sol. tocca, allora tocca per tutti gli $\hat{\alpha} < \alpha$ (ovvio)

Fatto 4.4 Esiste $\alpha > 0$ per cui c'è blow-up.

Dim. Osservo che $\underbrace{u^2 - \arctan t}_{f(t, u)} \geq \underbrace{u^2 - \frac{\pi}{2}}_{g(t, u)} \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$

Le soluzioni di $v' = v^2 - \frac{\pi}{2}$ con dato $v(0)$ abbastanza grande hanno blow-up (basta $v(0) > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$)

Ma le soluz. di $v' = v^2 - \frac{\pi}{2}$ sono sottosoluz. per $u' = u^2 - \arctan t$



Quindi se $u(0) > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, di sicuro ho blow-up.

Fatto 4.5 Se per un certo $\alpha > 0$ c'è blow-up, allora c'è per tutti gli $\hat{\alpha} > \alpha$.

Fatto 4.6 Considero i valori di α t.c.

$$\sup A^- \leq \alpha \leq \inf A^+$$

A^- A^+
↑ ↑
valori di α valori di α
per cui tocca per cui c'è
blow up

Cosa può succedere per questi α ?

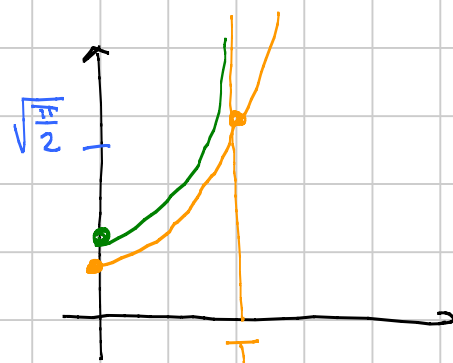
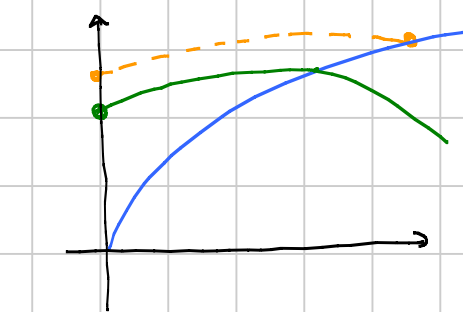
→ può toccare? NO! Se toccasse, basterebbe partire da un punto più avanti sulla curva e avrei una soluzione con un $u(0)$ maggiore che tocca.

→ può avere blow up? NO! Se avesse blow up in un tempo T , basterebbe risolvere con dato $u(\tau) > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ e avrei una soluzione che sta sotto alla precedente e ha ancora blow up.

→ L'unica possibilità rimasta è avere esistenza globale restano crescente. A quel punto $u(t) \rightarrow L \in [0, +\infty]$ e con il teo. asintoto si vede che $L = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. completato

Non basta il teo. asintoto... Se fosse $L > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, allora ad un certo tempo supererebbe $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, e questo basta per avere blow-up.

Fatto 4.7 Abbiamo in realtà dimostrato che A^+ e A^- sono aperti.



Fatto 4.8 $\sup A^- = \inf A^+$, quindi c'è un'unica soluzione che esiste globalmente ed è crescente sempre.

Supponiamo che ce ne siano 2: $u_1(t)$ e $u_2(t)$ con $u_1(0) < u_2(0)$.

Considero $w(t) := u_2(t) - u_1(t)$. Allora

$$w'(t) = u_2'(t) - u_1'(t) = [u_2(t)]^2 - \cancel{\arctan t} - [u_1(t)]^2 + \cancel{\arctan t} \geq 0$$

perché $0 \leq u_1(t) \leq u_2(t)$ per ogni $t \geq 0$.

D'altra parte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Fatto 5 Cosa succede per $\alpha < 0$. Dico che toccano tutte.

Se non toccano, tendono crescendo a $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

In particolare, per ogni α abbastanza negativo farebbero tutte così.

Prendiamone 2: $u_1(t) < u_2(t)$ e poniamo $w(t) = u_2 - u_1$. Allora

$$w' = u_2' - u_1' = u_2^2 - \cancel{\arctan t} - u_1^2 + \cancel{\arctan t}$$

$$= \underbrace{(u_2 - u_1)}_{+} \underbrace{(u_2 + u_1)}_{-} \leq 0$$

e quindi non basta per un assurdo.

Problema... pensarci...

— 0 — 0 —