

Sopra / sotto soluzioni (Revisited)

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Siano $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ e $u: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che u sia di classe C^1 in $[t_0, t_0 + \delta)$

Diciamo che

$u'(t) \geq f(t, u(t))$	$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$	sopra solus. debole
$u'(t) > f(t, u(t))$	"	sopra solus. stretta
$\leq$		sottosol. debole
$<$		sottosol. stretta

Si intende che $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$.

Oss. Sopra e sotto solus. hanno senso solo per le equazioni, non per i sistemi.

Teorema 1 Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Siano $v: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ e $u: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che

- (i) f è continua in Ω
- (ii) v è sopra solus. debole
- (iii) u è sottosolus. debole
- (iv) per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ almeno una delle 2 disug. è stretta
- (v) $v(t_0) \geq u(t_0)$

Allora

$$v(t) > u(t) \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$$

Dim. $w(t) := v(t) - u(t)$. Allora $w(t) > 0$ in un int. dx di t_0 .
Se poi $w(t)$ diventa ≤ 0 si trova un assurdo.

Teorema 2 Stessa situazione del teo. 1 con 2 modifiche

- (+ ipotesi su f) : f è continua + lip. nella variabile u unif. in t
- (- ipotesi su u e v) : non c'è più l'ipotesi (iv)

Allora

$$v(t) \geq u(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta).$$

Oss. Nel caso Lip. vale il teorema di confronto tra sopra e sotto sol. entrambe deboli

Dim. Sia L la costante di lip., quindi

$$|f(t, u_2) - f(t, u_1)| \leq L |u_2 - u_1| \quad \forall (t, u_1, u_2) \text{ t.c.}$$

$(t, u_1) \in \Omega, (t, u_2) \in \Omega.$

Dico che per ogni $\Delta > L$ e per ogni $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo si ha che

$$v_\varepsilon(t) := v(t) + \varepsilon e^{\Delta t} \quad (\text{oss. } v_\varepsilon(t_0) > v(t_0) \geq u(t_0))$$

è sopra solus. stretta.

Se lo dim. ho finito perché dal teo. 1 segue che

$$v_\varepsilon(t) > u(t) \quad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$$

e a quel punto basta fare il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Dimostro il claim

$$v'_\varepsilon(t) \stackrel{?}{>} f(t, v_\varepsilon(t))$$

$$\underbrace{v'(t)} + \underbrace{\varepsilon \Delta e^{\Delta t}} \stackrel{?}{>} \underbrace{f(t, v(t) + \varepsilon e^{\Delta t}) - f(t, v(t))}_{\text{green}} + \underbrace{f(t, v(t))}_{\text{blue}}$$

Per ipotesi $v'(t) \geq f(t, v(t))$. Quindi basta dim. $>$ tra il resto

Basta dim. che

$$\begin{aligned} f(t, v(t) + \varepsilon e^{\wedge t}) - f(t, v(t)) &< \wedge \varepsilon e^{\wedge t} \\ f(t, u_2) - f(t, u_1) &\leq L |u_2 - u_1| = L \varepsilon e^{\wedge t} < \wedge \varepsilon e^{\wedge t} \end{aligned}$$

$\uparrow$
 $\wedge > L$ ed il resto è > 0

Oss. Seme che $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo per essere sicuri che
 $(t, v_\varepsilon(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$.
— o — o —

Usando sopra / sottosoluz. abbiamo una nuova dim. del teo. di unicità per il pbm. di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Dim. (che non è la migliore) Siano u e v due soluzioni.
Considero u sottosol. e v soprasol. (deboli).

$$\text{Teo 2} \Rightarrow u(t) \leq v(t) \quad \text{per ogni } t \in \dots$$

Considero v sottosol. e u soprasol. (deboli)

$$\text{Teo 2} \Rightarrow v(t) \leq u(t) \quad \text{per ogni } t \in \dots \quad \text{☺}$$

— o — o —

Oss. Così non vale per i sistemi. Tuttavia si può riadattare...

Dim. Siano u e v due soluzioni. Considero

$$w(t) := \|u(t) - v(t)\|^2 \quad w: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \textcircled{\mathbb{R}}_{\text{scalare}}$$

Ora $w'(t) = 2 \langle u(t) - v(t), u'(t) - v'(t) \rangle$
quindi

$$|w'(t)| \leq 2 \|u(t) - v(t)\| \cdot \|u'(t) - v'(t)\|$$

$\uparrow$
c.s.

$$= 2 \|u(t) - v(t)\| \cdot \|f(t, u(t)) - f(t, v(t))\|$$

$$\leq 2 \|u(t) - v(t)\| \cdot L \|u(t) - v(t)\|$$

$$= 2L w(t)$$

In conclusione $w'(t) \leq 2L w(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$

Questo dice che

w è sottosoluz. di $u' = 2Lu$

e $z(t) \equiv 0$ è soprasoluz. della stessa. Essendo $w(0) \leq z(0)$ deduco che

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{banale}}}{0} \leq w(t) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{z(t)} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

e quindi $w(t) \equiv 0$.

— 0 — 0 —

Se io scrivo $w'(t) \leq 2L w(t)$ in forma integrale ottengo

$$w(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{w(t_0)} + \int_{t_0}^t w'(s) ds \leq 2L \int_{t_0}^t w(s) ds$$

e questo era il punto di partenza del Lemma di Gronwall dell'altra dimostrazione.

Teorema (Esistenza globale nel caso sublineare)

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$|f(t, u)| \leq A(t) + B(t) |u| \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

$\uparrow \quad \uparrow$
2 funzioni
continue

Allora c'è esistenza globale per ogni dato iniziale.

Dim. Basta escludere il blow-up.

Considero $w(t) := |u(t)|^2$

Allora

$$w'(t) = 2 \langle u(t), u'(t) \rangle$$

da cui

$$\begin{aligned} |w'(t)| &\leq 2 |u(t)| \cdot |u'(t)| \\ &= 2 |u(t)| \cdot |f(t, u(t))| \\ &\leq 2 |u(t)| \cdot [A(t) + B(t) |u(t)|] \\ &= 2 A(t) |u(t)| + 2 B(t) |u(t)|^2 \\ &\leq A^2(t) + |u(t)|^2 + 2 B(t) |u(t)|^2 \\ &= A^2(t) + (2B(t) + 1) w(t) \end{aligned} \quad 2ab \leq a^2 + b^2$$

Abbiamo dim. che

$$w'(t) \leq A^2(t) + (2B(t) + 1) w(t)$$

quindi $w(t)$ è sottosoluz. di $u' = A^2(t) + (2B(t) + 1) u$

Si tratta di una eq. lineare le cui soluzioni sono globali (c'è la formula), quindi $w(t) \leq$ funzione globalmente definita, quindi $w(t)$ non può avere blow-up.

— o — o —

Oss. 1 La dim. vale in generale per i sistemi, quindi con
 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $\quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $\quad \quad \quad t \quad u$

Basta interpretare $|x|$ come norma di x .

Oss. 2 Se $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la stessa dim. dice che la soluzione è definita su tutto $[a, b]$ ($t_0 \in (a, b)$)