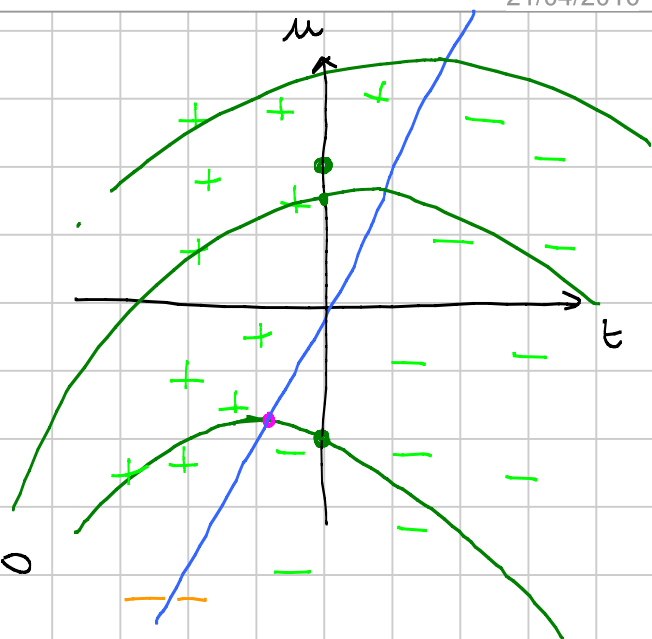


Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan(u-2t) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$

Fatto 1 Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ c'è soluz. globale unica (RHS glob. limitato)

Fatto 2 $u' \geq 0 \Leftrightarrow \arctan(u-2t) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq 2t$



Fatto 3 $\alpha < 0$ e $t \geq 0$: esistenza globale con limite $-\infty$

Dim. $u(t) \rightarrow l \in [-\infty, \alpha]$ per monotonia
 $\uparrow$ compreso

se per assurdo fosse $l \in \mathbb{R}$, allora $u'(t) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ e il teo. asintoto crea un assurdo.

Quindi $l = -\infty$.

Si vede che $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{u(t)}{t} = -\frac{\pi}{2}$ (Hôpital)

Fatto 4 $\alpha < 0$ e $t \leq 0$: esistenza globale

Ad un certo pto tocca la retta $2t$ e poi se resta sopra tendendo comunque a $-\infty$.

Tende a $-\infty$ perché ha limite ed i limiti reali non sono compatibili con teo. asintoto.

La funzione $v(t) = 2t$ è una soprasolus. (stretta)

$$v' \underset{2}{\geq} \arctan \underset{0}{(v-2t)}$$

quindi nel passato sta sotto le soluzioni

(semi-hard)

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{u(t)}{t} = \frac{\pi}{2}$$

Fatto 5 $\alpha > 0$ e $t \leq 0$. Esistenza globale sopra la retta e limite $-\infty$

Fatto 6 $\alpha > 0$ e $t \geq 0$

Ci sono due opzioni

→ tocca $u=2t$ e poi va giù

→ non tocca mai e sta sempre sopra

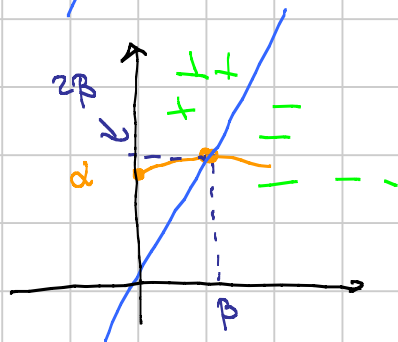


Fatto 7 $\exists \alpha > 0$ per cui tocca

Parto con un dato iniziale sulla retta

$$\begin{cases} u' = \arctan(u-2t) \\ u(\beta) = 2\beta \text{ (sulla retta)} \end{cases}$$

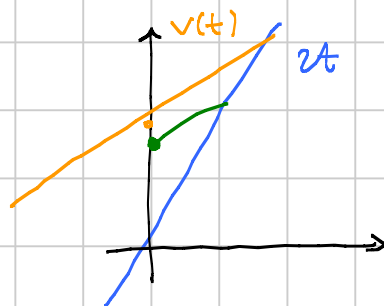
Tornando indietro, la solus. incontra l'asse $t=0$ in un certo $\alpha > 0$.



Se per un certo $\alpha_0 > 0$ tocca, allora tocca per tutti gli $\alpha \leq \alpha_0$

Fatto 8 Per ogni α tocca! Infatti $v(t) = \alpha + \frac{\pi}{2}t$ è soprasoluzione per $t \geq 0$

$$v'(t) \underset{\frac{\pi}{2}}{\geq} \arctan(v(t)-2t)$$



Oss. Calcoliamo $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{2t} \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(u(t)-2t)}{2} \leq \frac{\pi}{4} < 1$

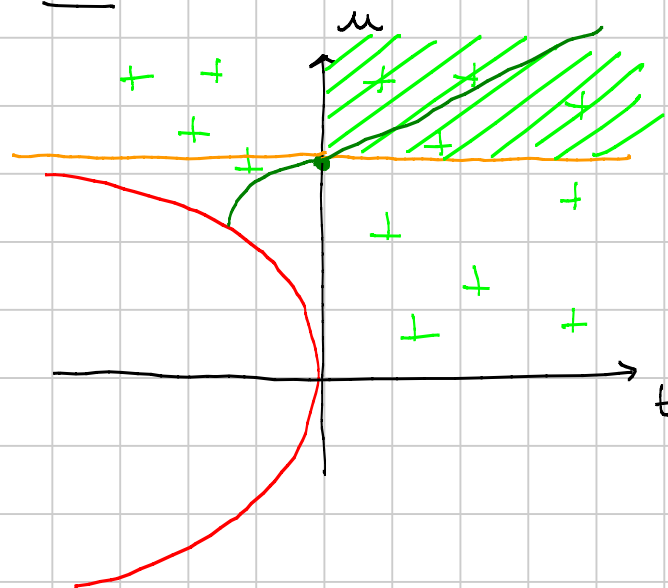
↑
flop perché basta
denom $\rightarrow +\infty$

$\Rightarrow$ definitivamente $\underbrace{u(t)}_{=0} \leq \underbrace{2(1-\varepsilon)t}_{=0}$ e questo basta

Esempio 2 $\begin{cases} u' = \frac{1}{u^2+t} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$

Per $t \leq 0$ c'è break down

Per $t \geq 0$ c'è esistenza globale perché



$f(t, u) \leq \frac{1}{\alpha^2}$ per $t \geq 0$ e $u \geq \alpha$ che è la zona in cui la soluzione vive.

Voglio trovare $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$ che esiste per monotonia

Brutal mode: se fosse $u(t) \rightarrow l$, avremmo $u'(t) \sim \frac{1}{l^2+t}$

$\Rightarrow u(t) \sim \log(t) \Rightarrow$ limite infinito

oscilla dal
p.to di vista
rigoroso

Dim. Se fosse $l \in \mathbb{R}$ avremmo $\alpha \leq u(t) \leq l$ per ogni $t \geq 0$, quindi

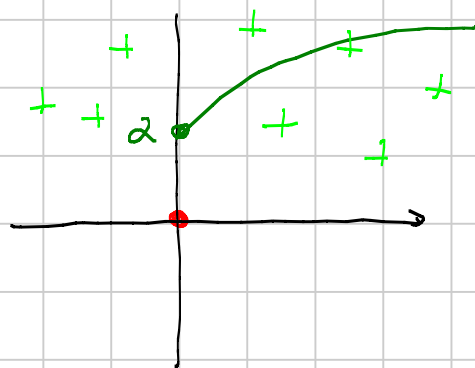
$$u'(t) \geq \frac{1}{l^2+t}, \text{ quindi } \underbrace{u(t)}_{\rightarrow +\infty} = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$$

$$\geq \alpha + \int_0^t \frac{1}{l^2+s} ds$$

$\rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$

In alternativa, basta indovinare una sottosoluzione, ma non sembra così evidente

Esempio 3
$$\begin{cases} u' = \frac{1}{u^2 + t^2} \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$



Le soluzioni hanno limite finito.

Ora

$$u'(t) \leq \frac{1}{t^2 + \alpha^2} \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

quindi
$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$$

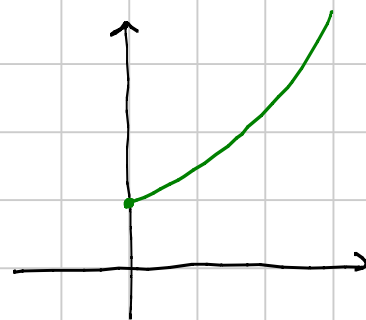
$$\leq u(0) + \int_0^t \frac{1}{s^2 + \alpha^2} ds$$

converge quando $t \rightarrow +\infty$

In alternativa posso provare ad indovinare una soprasoluzione.

Ritorno al passato
$$\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} = \frac{\pi}{2}$$



Domanda: c'è asintoto obliquo?

Dipende da

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{u(t) - \frac{\pi}{2}t}_{v(t)}$$

Cosa risolve $v(t)$?

$$v'(t) = u'(t) - \frac{\pi}{2} = \arctan(u(t)) - \frac{\pi}{2} = \arctan\left(v + \frac{\pi}{2}t\right) - \frac{\pi}{2}$$

Quindi devo studiare

$$\begin{aligned}v' &= \arctan\left(v + \frac{\pi}{2}t\right) - \frac{\pi}{2} \\&= -\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(v + \frac{\pi}{2}t\right)\right) \\&= -\arctan\left(\frac{1}{v + \frac{\pi}{2}t}\right)\end{aligned}$$

Ora $v(t)$ è monotona dec. ($v'(t) \leq 0$).

Supponiamo $v(t) \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Brutal mode: $v'(t) \sim -\arctan\left(\frac{1}{l + \frac{\pi}{2}t}\right) \sim -\frac{1}{l + \frac{\pi}{2}t}$

e quindi $v(t) \rightarrow -\infty$

Con lo stesso sistema di prima dimostro rigoros. che $v(t) \rightarrow -\infty$ e quindi niente asintoto.