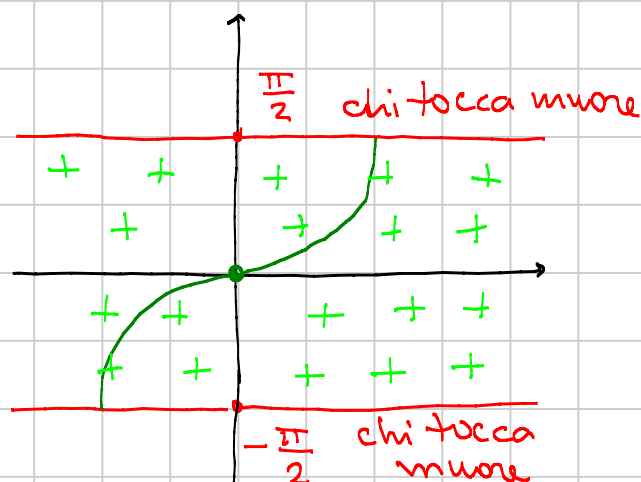


$$u' = f(u) \quad \text{AUTONOMI}$$

Esempio 1 $u' = \frac{1}{\cos u}$ $u(0) = 0$

$f(u)$



Fatto 1 C'è esistenza e unicità locale perché $f(u)$ è Lip. in un intorno di 0.

Fatto 2 Ci sono problemi se $u = \pm \frac{\pi}{2}$ (e non solo)

Fatto 3 $-\frac{\pi}{2} < u(t) < \frac{\pi}{2}$ finché la soluzione esiste, quindi $u'(t) > 0$ finché esiste

Nel futuro: $u(t)$ può esistere globalmente e tendere a $l \in [0, \frac{\pi}{2}]$ oppure avere break down

Fatto 4 Voglio dim. che c'è break down. Se ci fosse esistenza globale, avrei che $u(t) \rightarrow l$, ma allora

$$u'(t) = \frac{1}{\cos u(t)} \rightarrow \frac{1}{\cos l} \quad (\text{eventualmente } +\infty \text{ se } \cos l = 0)$$

Teo. asintoto $\Rightarrow \frac{1}{\cos l} = 0 \leadsto$ impossibile

Dim alternativa del break down $v(t) := t$. Dico che è una sottosoluzione

Dato verificare $v'(t) \leq \frac{1}{\cos v(t)}$

$$1 \leq \frac{1}{\cos t} \text{ ovvia}$$



Fatto 5 Per tempi negativi la situazione è simmetrica, anzi la soluzione è dispari

Infatti: se $u(t)$ è soluzione, allora $v(t) = -u(-t)$ è pure soluzione

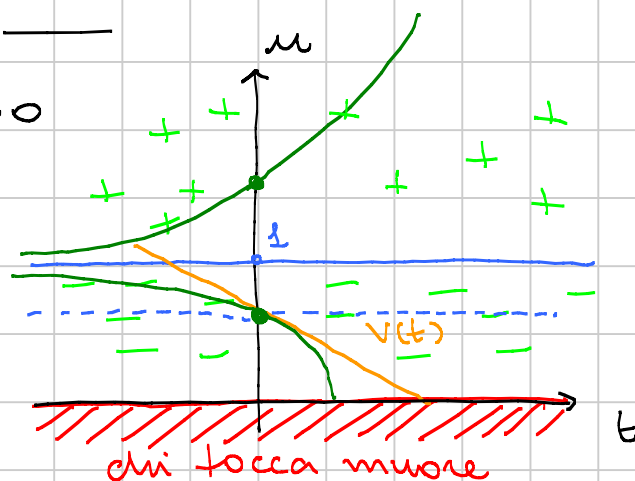
Dim. $v'(t) = u'(-t) = \frac{1}{\cos(u(-t))} = \frac{1}{\cos(-u(t))} = \frac{1}{\cos v(t)}$
 (cos è pari)

Quindi $v(t) = -u(-t)$ risolve la stessa eq. con lo stesso dato iniziale $\Rightarrow -u(-t) = u(t)$ per unicità.

Esempio 2 $u' = \log u$ $u(0) = \alpha > 0$

Fatto 1 $u(t) \equiv 1$ è soluzione

Fatto 2 Il segno di u' è come in figura



Fatto 3 Se $\alpha \in (0,1)$, allora

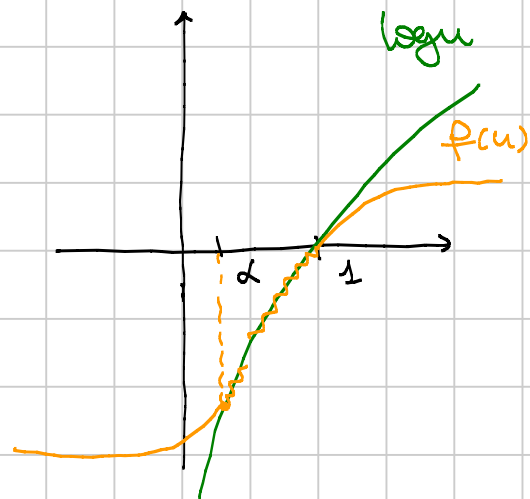
- ① per $t \leq 0$ si ha esistenza globale e $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 1^-$
- ② per $t \geq 0$ si ha break down

Dim ① Per $t \leq 0$ la soluzione $u(t) \in [\alpha, 1] \Rightarrow$ niente blow up e niente break down.

Altra idea: considero $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e dip. f.c.

$f(u) = \log u$ per ogni $u \in [\alpha, 1]$

Risolvere $u' = f(u)$ e questo ha sol. glob. perché f è glob. lim. Finché la solut. sta in $[\alpha, 1]$ risolvere $u' = \log u$ oppure $u' = f(u)$ è la stessa cosa.



Il limite si fa al solito modo: $u(t) \rightarrow l \in [\alpha, 1]$ per $t \rightarrow -\infty$ (per monotonia), ma allora $u' \rightarrow \log l$
Teo. asintotico $\Rightarrow \log l = 0 \Rightarrow l = 1$.

Dim 2 Due vie

- se ci fosse esist. glob. $\Rightarrow u(t) \rightarrow l \in [0, \alpha] \Rightarrow$
 $u'(t) \rightarrow \log l \rightsquigarrow \log l = 0 \rightsquigarrow l = 1$, impossibile.

- sparo $v(t) := \alpha + \log \alpha \cdot t$ e dico che è sopra solut.

$$v(0) = \alpha = u(0)$$

$$v'(t) \stackrel{?}{\geq} \log v(t)$$

" " " "

$$\log \alpha \stackrel{?}{\geq} \log(\alpha + \log \alpha \cdot t) \Leftrightarrow \alpha \geq \alpha + \underbrace{\log \alpha}_{<0} \underbrace{t}_{>0}$$

Fatto 4 Per $\alpha > 1$ si ha

- per $t \leq 0$ esistenza globale con $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 1$ (solito)

- per $t \geq 0$ esistenza globale perché $f(u) \leq A + Bu$ per opportuni A e B

Volendo posso cercare una sopra soluzione $v(t) := \alpha e^t$

$$v(0) = \alpha = u(0)$$

$$(v(0) \geq u(0))$$

$$v'(t) \stackrel{?}{\geq} \log v(t)$$

$$\alpha e^t \stackrel{?}{\geq} \log \alpha e^t$$

$$\alpha e^t \stackrel{?}{\geq} t + \log \alpha \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

Sembra vero perché

$$\varphi(t) = \alpha e^t - t - \log \alpha \geq 0 \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

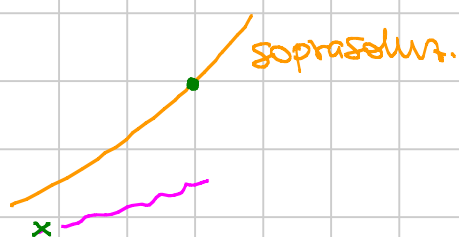
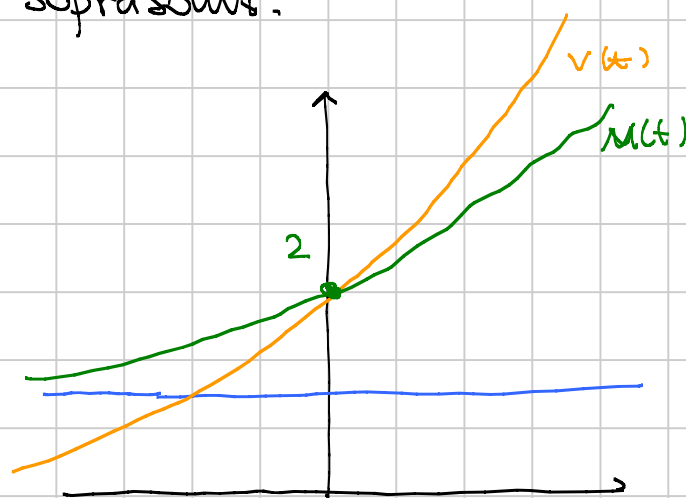
$$\varphi(0) = \alpha - \log \alpha > 0, \quad \varphi'(t) = \alpha e^t - 1 \geq \alpha - 1 > 0.$$

Oss. la soprasolus. impedisce il blow up $\Rightarrow$ esistenza glob.
— o — o —

Oss. Sopra e sotto solus. funzionano come uno si aspetta solo nel futuro.
Nel passato si gira tutto.

$$\begin{cases} u' = \log u \\ u(0) = 2 \end{cases} \quad v(t) = 2e^t \text{ è soprasolus.}$$

Per $t \leq 0$ la soprasoluzione con la stessa partenza sta sotto



se $u(t)$ arrivasse sotto $v(t)$ per un certo $t_0 < 0$, allora risolvendo da t_0 in avanti e vedo che $u(t)$ dovrebbe stare sempre sotto (< stretto) da t_0 in poi.

— o — o —

Esempio 3 $u' = \frac{u^2 + 3u}{u - 2}$

ci aspettiamo

- per $u(0) \in (0, 2)$
→ break down per $t \leq 0$
→ esist. glob. per $t \geq 0$
con $u(t) \rightarrow 0$

- per $u(0) \in (-3, 0)$
esistenza globale nel passato e nel futuro
con limiti 0 e -3.

- per $u(0) > 2$
→ break down per $t \leq 0$
→ esistenza globale per $t \geq 0$ in quanto $f(u) \leq A + Bu$
per $u \geq 2$

- per $u(0) < -3$
→ esistenza globale per $t \leq 0$ con limite -3
→ esistenza globale per $t \geq 0$ con limite $-\infty$

$$|f(u)| \leq A + Bu \quad \text{per } u \leq -3$$

(f cresce linearmente per $u \rightarrow -\infty$ e per $u \rightarrow +\infty$)

