

SOPRA SOLUZIONI E SOTTOSOLUZIONI

Consideriamo un'eq. diff. $u' = f(t, u)$

Def. Si dice che $v: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è sottosoluzione se

$$v'(t) \leq f(t, v(t)) \quad \forall t \in (a, b)$$

Si dice sottosoluzione stretta se vale con $<$ stretto.

Si dice che v è soprasoluzione se vale la stessa cosa con $\geq$ ($>$).

Teorema Supponiamo che $f(t, u)$ sia continua nelle due variabili.

Sia $u: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una soprasoluzione

Sia $v: [t_0, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una sottosoluzione

Supponiamo che

(i) una delle 2 sia stretta (basta che per ogni $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ almeno una delle 2 disug. sia stretta)

(ii) $u(t_0) > v(t_0)$

Allora

$$u(t) > v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

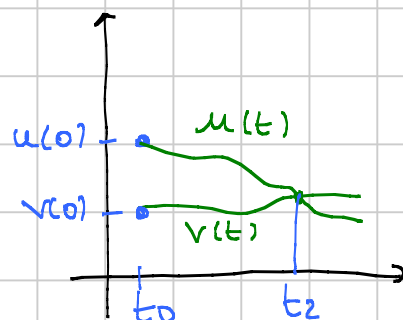
Dim. Supponiamo wlog

$$u'(t) > f(t, u(t)) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta)$$

$$v'(t) \leq f(t, v(t)) \quad "$$

Ragioniamo per assurdo supponendo che

$$\exists t_1 \in [t_0, t_0 + \delta) \text{ t.c. } u(t_1) \leq v(t_1)$$



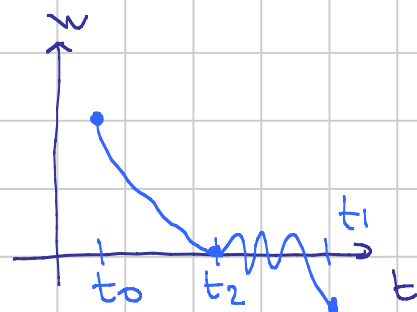
Pongo

$$t_2 := \sup \underbrace{\{t \in [t_0, t_0 + \delta) : u(t) \leq v(t)\}}_{\text{contiene } t_1, \text{ quindi } \neq \emptyset} = \sup \text{ degli zeri}$$

Pongo $w(t) := u(t) - v(t)$.

Osservo che w è continua e $w(t_2) = 0$
(come nel teorema di esistenza degli zeri).

Inoltre $t_2 > t_0$ per continuità



Idea: dal disegno $w'(t_2) \leq 0$, ma d'altra parte

$$w'(t_2) = u'(t_2) - v'(t_2) > 0$$
$$> f(t_2, u(t_2)) \geq -f(t_2, v(t_2))$$

Questi sono uguali perché $w(t_2) = u(t_2) - v(t_2) = 0$

L'unica cosa da giustificare è $w'(t_2) \leq 0$, ma è analisi 1:

$$w'(t_2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{w(t_2+h)}^{\geq 0} - \overbrace{w(t_2)}^0}{\textcircled{2} \text{ neg}} \leq 0 \quad \text{perché limite di roba negativa.}$$

Oss. 1 Basta supporre in realtà che $u(0) \geq v(0)$.

Consideriamo come prima la differenza $w(t) := u(t) - v(t)$

Ora se c'è > 0 è come prima.

Se c'è $w(t_0) = 0$, allora $u(t_0) = v(t_0)$
quindi

$$w'(t_0) = u'(t_0) - v'(t_0)$$
$$> f(t_0, u(t_0)) - f(t_0, v(t_0)) = 0$$

↑
uguali

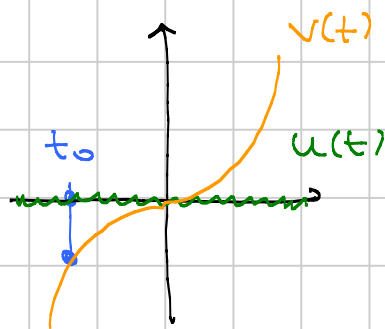


e questo garantisce
che $w(t) > 0$ un po'
a dx di t_0

Oss. 2 Se tolgo che una delle 2 sia stretta può saltare tutto anche se $u(0) > v(0)$.

Basta pensare al solito esempio di non unicità

$$u' = 3|u|^{2/3}$$



Teorema Se in aggiunta ho che $f(t, u)$ è come nel tes. di esistenza ed unicità, allora bastano $\geq$ e $\leq$ (non serve che nessuna sia stretta)

Teorema (Esistenza globale nel caso sublineare)

Supponiamo che $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che esistano due funzioni $A(t)$ e $B(t)$ continue tali che

$$|f(t, u)| \leq A(t) + B(t)|u| \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

(cioè f non cresce troppo nella variabile u)

Allora per ogni $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}^2$ la soluz. è globale.

Via canonica per costruire sopra / sottosoluzioni

Supponiamo che $f(t, u) < g(t, u) \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$

Risolvo $u' = f(t, u) \quad v' = g(t, v)$

Allora v è soprasoluzione stretta della prima equazione

Dim. $v'(t) = g(t, v(t)) > f(t, v(t))$

Aggiunto dopo video: la dim. non funziona. Rifatta meglio alla lezione 114.

Dim. teo sopra

$$f(t, u) < \underbrace{A(t) + B(t)u + 1}_{g(t, u)} \quad \text{per } u > 0$$

No: non posso togliere il valore assoluto Dopo video

Risolvo $v' = g(t, v) = B(t)v + A(t) + 1$

Questo lo so risolvere dall'analisi 1 (fattore integrante, ecc...) e scopro che ha soluz. globale.

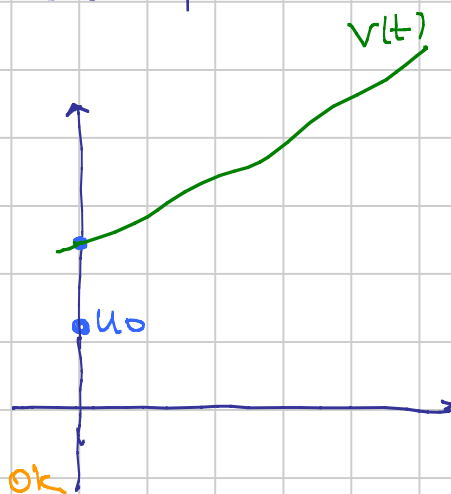
Ma allora v è sottosoluz. dell'eq. con f e ha esistenza globale $\Rightarrow u$ non può avere blow up a $+\infty$ per tempi positivi.

La stessa cosa la faccio a partire da

$$f(t, u) > -A(t) - B(t)u - 1$$

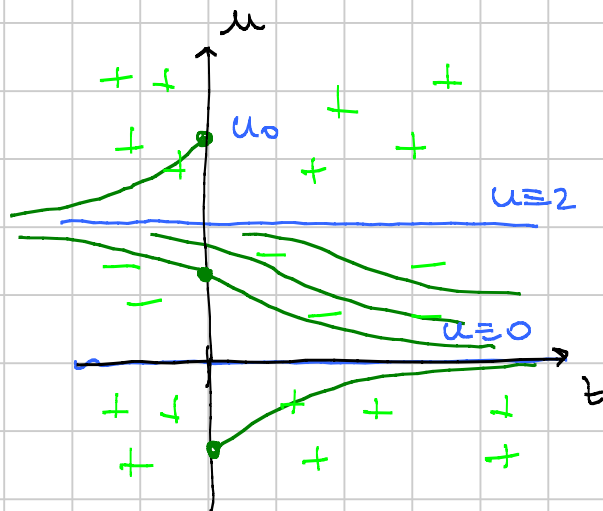
che vale per $u < 0$.

Da qui tu poi ok



Esempio $u' = u^2 - 2u$

Se parto con $u(0) > 2$, alla fine è come fosse $u' = u^2$ e queste hanno blow-up. Come lo dimostro?



Analisi 1 $\Rightarrow \exists c > 0$ t.c. $\underbrace{u^2 - 2u}_{f(t, u)} \geq \underbrace{cu^2}_{g(t, u)} \quad \forall u \geq u_0$

È come dire che $1 - \frac{2}{u} \geq c > 0 \quad (c = 1 - \frac{2}{u_0} > 0)$

Le soluzioni di $v' = cv^2$ sono sottosoluzioni di $u' = u^2 - 2u$

Ma le soluzioni di $v' = cv^2$ hanno tutte blow up se hanno dato $v(0) > 0$.

$$\begin{cases} u' = u^2 - 2u \\ u(0) = 4 \end{cases}$$

In un angolo calcolo $C = \frac{1}{2}$

Risolvere

$$\begin{cases} v' = \frac{1}{2} v^2 \\ v(0) = 4 \end{cases}$$

$$\frac{v'}{v^2} = \frac{1}{2} \leadsto -\frac{1}{v} = \frac{t}{2} + C$$

BRUTTA
COPIA

$$v(t) = \frac{2}{C - t}$$

$$v(t) = \frac{4}{1 - 2t}$$

Considero $v(t) := \frac{4}{1 - 2t}$. Verifico che $v' = v^2 - 2v$

Faccio il conto...

