

STUDIO QUALITATIVO DI EQ. DIFF.

Strumenti : $\rightarrow$ tes. dell'asintoto
 $\rightarrow$ Sopra / sotto soluzioni
 $\rightarrow$ tes. di esistenza glob. / blow up

Tes. dell'asintoto Sia $A \in \mathbb{R}$ e sia $u: [A, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 .

Supponiamo che

(i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \in \mathbb{R},$

(ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t)$ esiste in $\overline{\mathbb{R}}.$

Allora $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = 0.$

Oss. ① Vale un enunciato analogo per $t \rightarrow -\infty$

② Altro modo equiv. di enunciazione

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \begin{matrix} \nearrow \text{N.E.} \\ \searrow 0 \end{matrix}$$

③ Può succedere che $u'(t)$ non ha limite, ad esempio

$$u(t) = \frac{\sin(t^2)}{t} \quad u(t) \rightarrow 0$$

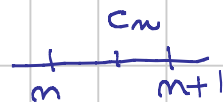
$$u'(t) = \frac{\cancel{2t} \cos(t^2)}{t} - \underbrace{\frac{\sin(t^2)}{t^2}}_{\downarrow 0}$$

$\downarrow$
Non ha lim.



Dim. Per Lagrange $u(m+1) - u(n) = 1 \cdot u'(c_m)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ l & - & l \\ \in \mathbb{R} & & \in \mathbb{R} \end{array}$$



Ora $\lim_{n \rightarrow +\infty} u'(c_n) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = l - l = 0$

↑
qui serve che u' ha
limite

— 0 —

Oss. (4) Enunciato più completo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \liminf_{t \rightarrow +\infty} u'(t) \leq 0 \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} u'(t)$$

— 0 — 0 —

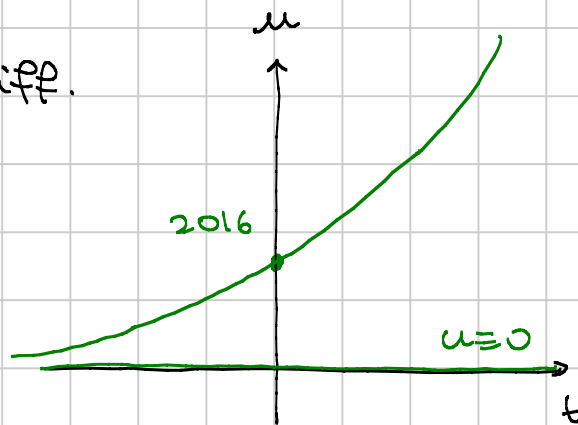
Esempio 1 $\begin{cases} u' = \arctan u \\ u(0) = 2016 \end{cases}$ Capire la soluzione senza risolvere

Fatto 1 Il pbm. ha sol. glob. unica (infatti $f(t, u)$ è glob. limitata e loc. dip. su u)

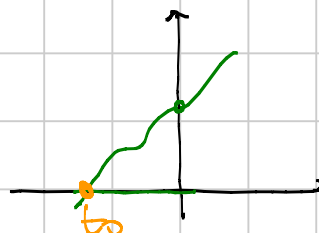
Fatto 2 $u(t) \equiv 0$ è soluz. dell'eq. diff.

Fatto 3 $u(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Se diventasse ≤ 0 da qualche parte, dovrebbe passare da 0, e lì ci sarebbe una violazione di unicità



Fatto 4 u è strettamente
monotona su tutto $\mathbb{R}$



$$u' = \arctan \underbrace{u}_{>0} > 0$$

Fatto 5 Per monotonia $u(t)$ ha limite per $t \rightarrow \pm \infty$.

Per $t \rightarrow -\infty$ sappiamo che $\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = l \in \mathbb{R}$.

Per l'eqn.

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan u(t) = \arctan l$$

quindi $u'(t)$ ha limite. Tes. asintoto $\Rightarrow u'(t) \rightarrow 0$
cioè $\arctan l = 0$, cioè $l = 0$.

Per $t \rightarrow +\infty$ sappiamo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = l \in [2016, +\infty]$
↑ compreso

Supponiamo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$. Allora come prima

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \arctan l, \text{ ma per il tes. asintoto dovrebbe}$$

essere $l = 0$, che è impossibile perché $l \geq 2016$.

Quindi resta solo $l = +\infty$.

Fatto 6 $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ (bootstrap)

Fatto 7 Sembrerebbe convessa... $u' = \arctan u$

$$u'' = (\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2} u' = \frac{\arctan u}{1+u^2} > 0 \text{ sempre } \text{😊}$$

Fatto 8 Sembra che $u(t) \sim \frac{\pi}{2} t$ per $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{t} \stackrel{\text{H\ddot{o}p}(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan u(t) = \frac{\pi}{2}$$

Fatto 8.5 Ci sarà l'asintoto obliquo a $+\infty$?

Fatto 9 Sembra che $u(t) \sim k e^t$ per $t \rightarrow -\infty$

Brutale! $u' = \arctan u \sim u$
 $\uparrow$
per $u \sim 0$

$u' = u$ ha come soluz.
 $u(t) = k e^t$

Calcoliamo $\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\log u(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{u'(t)}{u(t)}$
 $= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\arctan u(t)}{u(t)} = 1$
 $\uparrow$
solito limite notevole

Fatto 10 Per l'asintoto obliquo servirebbe

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(u(t) - \frac{\pi}{2} t \right)}_{v(t)} \in \mathbb{R} \quad \text{Come lo dimostro?}$$

$$v'(t) = u'(t) - \frac{\pi}{2} = \arctan u(t) - \frac{\pi}{2} < 0$$

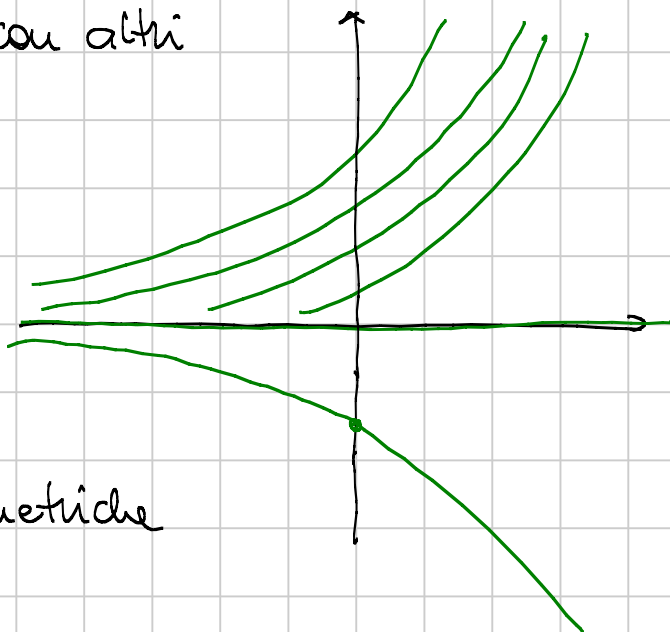
$$\Rightarrow v(t) \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Mi basterebbe sapere che $v(t)$ è limitata dal basso, ma questo (per ora) non è chiaro.

Fatto 11 Come sono fatte le soluz. con altri dati iniziali?

Le soluzioni con $u(0) > 0$ sono tutte traslate di $x - s_x$ di quella di prima (proprietà delle eq. autonome)

Quelle con $u(0) < 0$ sono le simmetriche delle altre risp. all'asse x



Detto bene: se $u(t)$ è una soluzione, allora $-u(t)$ è solus.

Pongo $v(t) = -u(t)$ e vedo cosa risolve:

$$v'(t) = -u'(t) = -\arctan u(t) = \arctan(-u(t)) = \arctan v(t)$$

$\arctan$ è dispari

Esempio 2 $\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

Fatto ①: $u(t) \equiv 0$ sono
 $u(t) \equiv \pi$ soluzioni

Fatto ② $0 < u(t) < \pi \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Fatto ③ La soluzione esiste unica globale

Fatto ④ $u'(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Fatto ④ $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \pi$

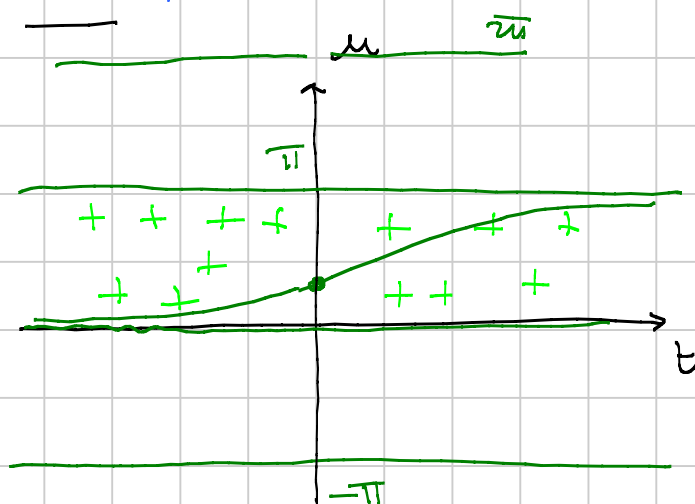
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$$

Per $t \rightarrow +\infty$ abbiamo $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$ esiste ed è $l \in [1, \pi]$.

Per l'equazione $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sin u(t) = \sin l$
quindi esiste

Tes. asint. $\Rightarrow$ su $l=0$ e l'unica possibilità in $[1, \pi]$ è $l=\pi$.

Discorso analogo a $-\infty$



Fatto ⑤ La concavità cambia quando attraverso $\frac{\pi}{2}$

$$u'' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos u \cdot \sin u$$

↓ > 0 sempre
 < 0 per $u \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$
 > 0 per $u \in (0, \frac{\pi}{2})$

Fatto ⑥ Se avessimo avuto

$$\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = 4 \end{cases}$$

Tutti gli asintoti è
ragionevole che siano
presi esponenzialmente.

