

Teo. di esistenza globale e alternativa

Teo. di esistenza globale 1 Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua,
localmente lip. nella seconda variabile (ma non serve davvero)
e globalmente limitata, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(t, u)| \leq M \quad \forall (t, u) \in \mathbb{R}^2$$

Allora per ogni (t_0, u_0) il pbm. di Cauchy

$$u' = f(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

ha soluzione globale $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (unica se c'è lip. loc.)

Dim. Basta dimostrare che per ogni $\delta > 0$ c'è una soluzione definita in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$. Per unicità queste soluzioni si ricolmano fra di loro.

Basta considerare $r := M\delta$ e applicare il teo. di esistenza locale in $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [u_0 - r, u_0 + r]$

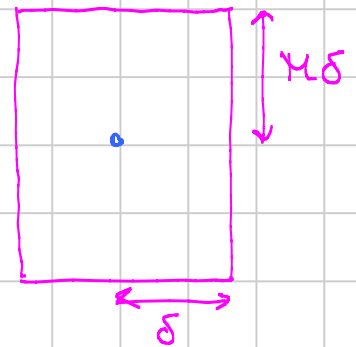
Trovo una soluzione definita in $[t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1]$ purché

$$\delta_1 \leq \delta$$

$$M\delta_1 \leq r$$

$\leadsto$ posso prendere $\delta_1 = \delta$!!!

Occhio δ_1 non dipende dalla cost. di lip.



Oss. Ho usato la lip. solo per ricolmare le soluzioni. Altrimenti le solut. con δ diversi potrebbero essere diverse.

TEO. ALTERNATIVA

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) f continua

(ii) f loc. lip. nella 2^a variabile (ma non
senza davvero)

Sia $(t_0, u_0) \in \Omega$ e sia u una soluz. locale del pbm. di Cauchy

$$u' = f(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

Allora la soluzione u può essere prolungata ad un int. massimale (nel futuro) $[t_0, T)$

e vale almeno una delle seguenti 3 opzioni ^{↑ escluso}

① $T = +\infty$ (esistenza globale)

② $\limsup_{t \rightarrow T^-} |u(t)| = +\infty$ (blow up)

③ $\liminf_{t \rightarrow T^-} \text{dist}((t, u(t)), \Omega^c) = 0$ (break down)

[↑]
il grafico esce
da Ω .

[↑]
p.to sul
grafico

[↑]
complementare di Ω
 $\Omega^c = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ (chiuso)

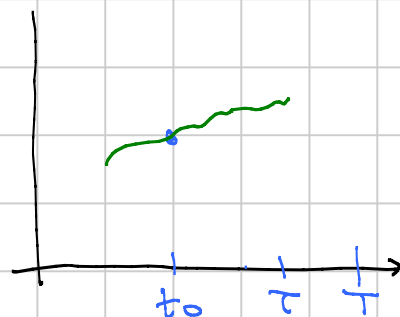
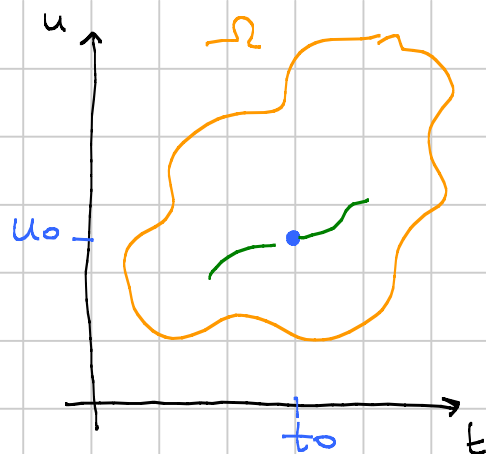
Un discorso analogo vale nel passato

Dim. Prolungamento Come prolungo una soluzione?

Considero $T := \sup \{ \tau \geq t_0 : \text{esiste una soluzione definita in } [t_0, \tau] \}$

[↑]
non vuoto per teo.
di esistenza locale

Se posso ricollare queste soluzioni ottengo
una sol. definita in tutto $[t_0, T)$



Oss. Se non voglio usare l'unicità sono costretto ad usare Zorn. Dico che una solus. è "maggiore di un'altra" se

- ha tempo di vita più lungo
- coincide nell'intervallo comune.

È un ordine parziale e tutte le catene hanno elem. max.
⇒ esiste un elemento massimale generale, cioè una soluzione non prolungabile.

Cosa può succedere in T ?

Supponiamo di avere una solus. in $[t_0, T)$ NON ulteriormente prolungabile. Allora valgono ①, ② oppure ③.

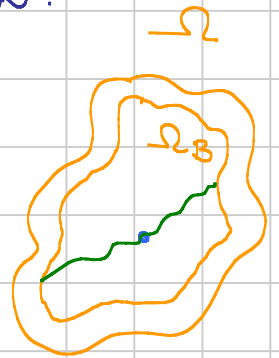
Infatti, supponiamo per assurdo che non valgano.

Allora esistono due costanti $A > 0$ e $B > 0$ tali che

$$|u(t)| \leq A \quad \forall t \in [t_0, T)$$

Poiché $\Omega_B = \{ (t, u) \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}((t, u), \Omega^c) \geq B \}$ vale

$$(t, u(t)) \in \Omega_B \quad \forall t \in [t_0, T)$$



(in altri termini: la soluzione sta in un insieme limitato e ben lontano da $\partial\Omega$)

Ora

$$\{ (t, u) : |u| \leq A, (t, u) \in \Omega_B, t \in [t_0, T] \}$$

è compatto perché è chiuso e limitato, quindi $f(t, u)$ ammette un massimo M in quell'insieme.

Ma allora $u(t)$ è lip. in $[t_0, T)$ perché $|u'(t)| \leq M$

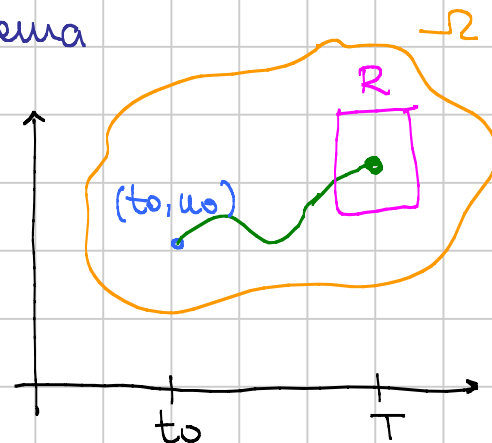
Ma allora $u(t)$ è unif. cont. in $[t_0, T)$, quindi estendibile fino a T , cioè esiste

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = L$$

Ora posso ripartire risolvendolo il problema

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = L \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza applicato in un rettangolo centrato in (T, L) posso prolungare la soluzione in $[T, T+\delta]$ e questo contraddice l'ipotesi di non prolungabilità.



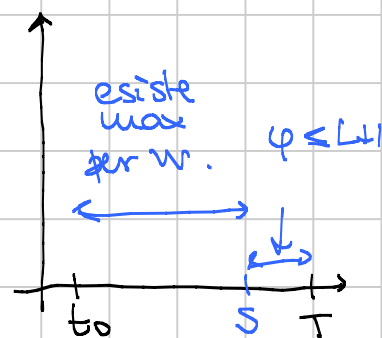
Dettagli: ① perché $|u(t)| \leq A$ per ogni $t \in [t_0, T)$.

Considero la funzione

$$\varphi(t) := |u(t)|$$

è continua e ha limsup finito per $t \rightarrow T^-$, quindi è limitata superiormente.

Detto $L = \limsup$, in un intorno δx di T vale $\varphi(t) \leq L+1$



② Perché $(t, u(t)) \in \Omega_B$ per un certo $B > 0$?

Considero la funzione

$$\psi(t) := \text{dist}((t, u(t)), \Omega^c)$$

È continua perché composizione di funzioni continue

(Fatto generale: (X, d) metrico, $A \subseteq X$ sottocinsieme $\neq \emptyset$, allora

$$\varphi(x) = \text{dist}(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$$

è una funzione 1-lip., quindi continua. Inoltre

A è chiuso $\Leftrightarrow A = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$)

Conclusione $\psi(t)$ è continua in $[t_0, T)$ e $\psi(t) > 0$
per ogni $t \in [t_0, T)$

Essendo poi $\liminf_{t \rightarrow T^-} \psi(t) > 0$ posso concludere (solito modo)
che

$$\inf_{\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}} \{ \psi(t) : t \in [t_0, T) \} = B > 0.$$