

Dim. teo. esistenza e unicità :

- ① Contrazioni classica
- ② Contrazioni con dist. pesata
- ③ Iterate di Picard
- ④ m-esima iterata è contrazione

... $\delta, L < 1$

tempo di vita δ_1
non dipende da
cost. Lip

Basate su
COMPLETEZZA

Dim. teo. sola esistenza :

- ① Schauder (non vedremo)
- ② Approx. Lipschitz
- ③ Approx. Tonelli
- ④ Eulero esplicito (non vedremo)

Basate su argomenti di
COMPATTEZZA
(Ascoli - Arzelà)

Idea di ② : devo risolvere $u' = f(t, u)$ $u(t_0) = u_0$

Approssimo f con funzioni f_n Lipschitz e risolvo

$$u' = f_n(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

→ Trovo soluzione (unica $u_n(t)$) e faccio vedere
che $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ a meno di sottosucc.
e $u_\infty(t)$ risolve il pbm. vero

Oss. ① I problemi approx. hanno soluz. con un tempo di vita
COMUNE ($\delta_1 \leq \delta$, $M\delta_1 \leq 1$) grazie alle dim. del
teo. esist. e unicità senza dip. da L .

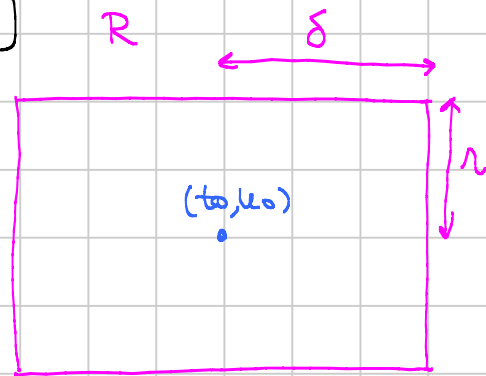
② L'unicità si perde nel momento in cui prendo le
s.succ., cioè sottosucc. diverse di $u_n(t)$ potrebbero
convergere a soluz. $u_\infty(t)$ diverse del problema
limite $u' = f(t, u)$ $u(t_0) = u_0$.

— o — o —

PROBLEMI APPROSSIMANTI ALLA TONELLI

$f(t, u)$ continua in R e $|f(t, u)| \leq M$

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$



Risolviamo
$$\begin{cases} u'_m(t) = f(t, u_m(t - \frac{1}{n})) \\ u(t) = u_0 \end{cases}$$
 per ogni $t \leq t_0$ ← sistema i tempi $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$

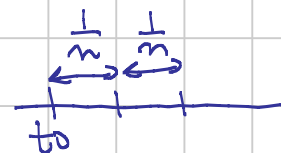
RITARDO

Idea: $u'_m(t)$ dipende dal valore di u_m in un tempo PRECEDENTE

Vantaggio: è molto facile dimostrare che il problema appross. ha soluzione e tale soluzione è definita almeno per $t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$ con $\delta_1 \leq \delta$ e $M\delta_1 \leq r$.

Dim. Per $t \in [t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$ abbiamo $u'_m(t) = f(t, u_0)$, quindi basta integrare.

Per $t \in [t_0 + \frac{1}{n}, t_0 + \frac{2}{n}]$ abbiamo



$$u'_m(t) = f(t, u_m(t - \frac{1}{n}))$$

intervallo precedente, quindi conosco già il valore, quindi basta integrare

E così via...

L'unica cosa che devo controllare è che $u_m(t) \in [u_0 - r, u_0 + r]$ ma questo segue da Lagrange

$$|u_m(t) - u_m(t_0)| = \underbrace{|t - t_0|}_{\leq \delta_1} \cdot \underbrace{|u'_m(\xi)|}_{\leq M} \leq \delta_1 M \leq r.$$

misterioso

perché è f (qualcosa)

Oss. Le $u_n(t)$ sono C^1 perché sono C^0 tratto per tratto e continue negli estremi $t_0 + \frac{k}{n}$, ma a quel punto $u_n'(t) \in C^0$, quindi u_n è C^1 .

Ora bisogna passare al limite con A.A.

(i) c'è equibondatazza $u_n(t) \in [u_0 - 2, u_0 + 2]$

(ii) c'è equilipschitzianità $|u_n'(t)| \leq M$

L'intervallo di definizione è $[t_0, t_0 + \delta_1]$, quindi comune.

A.A. $\Rightarrow$ a meno di s.succ. $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ unif.

Resta da dim. che $u_\infty(t)$ risolve il pbm. limite.

Basta passare al limite nella formulazione integrale

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s - \frac{1}{n})) ds$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow \text{serie conv. unif. delle integrande}$$
$$u_\infty(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds$$

Qui mi serve che $f(s, u_n(s - \frac{1}{n})) \rightarrow f(s, u_\infty(s))$ unif.

Basta spezzare il problema in 2:

$\rightarrow$ se $u_n(s) \rightarrow u_\infty(s)$ unif., allora $u_n(s - \frac{1}{n}) \rightarrow u_\infty(s)$ unif.

$$|u_\infty(s) - u_n(s - \frac{1}{n})| \leq |u_\infty(s) - u_\infty(s - \frac{1}{n})| + |u_\infty(s - \frac{1}{n}) - u_n(\dots)|$$

piccolo per lip. di u_∞ piccolo per conv. unif.

$\rightarrow$ se $v_n(s) \rightarrow v_\infty(s)$ unif., allora $f(s, v_n(s)) \rightarrow f(s, v_\infty(s))$ unif.

Oss. Una volta che ho la conv. unif. posso passare al limite anche nella formulas. diff. senza passare a quella integrale

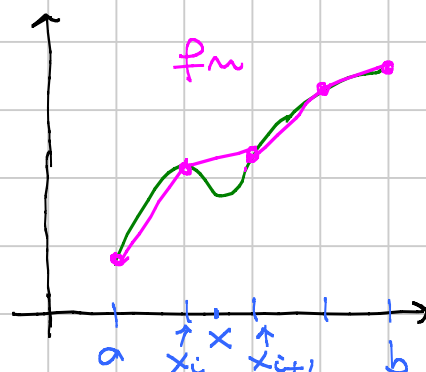
$$\lim^n (t) = f(t, \lim(t - \frac{1}{n}))$$

→ Deriv. conv. unif. ovunque } ⇒ derivate convergono alle
 → Funzioni conv. in un pto } derivate.
 — o — o —

Prop. (esercizio) Sia $f: [a, b] \rightarrow [-M, M]$ continua. Allora esiste una succ. $f_n: [a, b] \rightarrow [-M, M]$ dip. t.c.

$$f_n \rightarrow f \quad \text{unif.}$$

Dim. 1 Fisso n , diviso $[a, b]$ in n pezzi uguali e prendo la affine a tratti che interpola



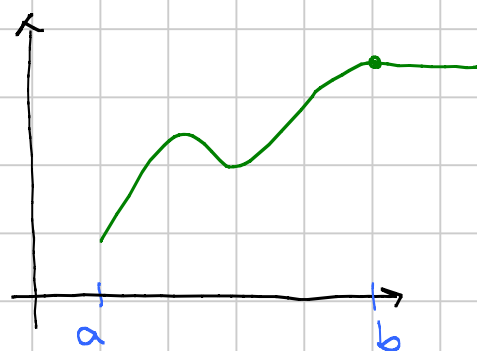
È evidente che è dip. Resta da dim. la conv. unif. che segue dalla unif. continuità di $f(x)$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_i)|}_{\substack{\text{piccolo se } x \text{ e } x_i \\ \text{sono vicini}}} + \underbrace{|f(x_i) - f_n(x_i)|}_0 + \underbrace{|f_n(x_i) - f_n(x)|}_{\text{come il primo}}$$

Esercizio: sistemare i dettagli

Dim 2 Estendo f oltre b mettendola costante. Definisco

$$f_\varepsilon(x) := \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} f(y) dy}_{\text{media di } f \text{ tra } x \text{ e } x+\varepsilon}$$



Dico che $f_\varepsilon(x)$ è Lipschitziana, anzi C^1 . Infatti

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} [f(x+\varepsilon) - f(x)], \text{ quindi } |f'_\varepsilon(x)| \leq \frac{2M}{\varepsilon}$$

È ovvio che $f_\varepsilon(x) \in [-M, M]$ (proprietà degli integrali)

Dico che $f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$ unif.

La conv. puntuale è il teo. fond. del calcolo integrale.

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} f(y) dy - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \underbrace{[f(y) - f(x)]}_{\text{se } \varepsilon \text{ è abbastanza piccolo, questo è piccolo unif. in } x}} dy \right|$$

se ε è abbastanza piccolo,
questo è piccolo unif. in x

Mi è dato $\eta > 0$. Scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. (come se fosse $\delta \dots$)

$$|y - x| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \eta$$

a quel p.to

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} \underbrace{|f(y) - f(x)|}_{\leq \eta} dy \leq \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon \eta = \eta.$$

— o — o —

Oss. In 2 variabili (o in n variabili) posso fare la scelta su un quadrato (o cubo)

