

TEOREMA DI ASCOLI-ARZELÀ METRICO

Sia (X, d_X) uno sp. metrico COMPATTO.

Sia (Y, d_Y) uno sp. metrico (non serve nulla, nemmeno completo)

Sia $f_n: X \rightarrow Y$ una succ. di funzioni.

Supponiamo che

(i) (COMPATTEZZA A t FISSO) Per ogni $t \in X$ la successione $\{f_n(t)\} \subseteq Y$ è relativamente compatta, cioè

$$\forall t \in X \quad \exists K \subseteq Y \text{ compatto t.c. } f_n(t) \in K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

↑
può dipendere da t

(ii) f_n è equicontinua nel solito senso.

Allora esiste $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ strett. cresc. ed esiste $f_\infty: X \rightarrow Y$ t.c.

$$f_{n_k} \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. su } X.$$

Dim. Prendo $D \subseteq X$ denso e numerabile.

Facile: fisso una 1-rete : # finito di pti

fisso una $\frac{1}{2}$ -rete : "

fisso una $\frac{1}{4}$ -rete : ...

I metrici
compatti soddi-
sfano il primo
assioma di
numerabilità

Prendo l'unione di tutte queste

Passo 1 Convergenza puntuale in D . Si fa come prima usando la compattezza a t fisso

Passo 2 Convergenza puntuale in X della stessa sottosucc.

Come prima mostro che $\forall t \in X$ la succ. $\{f_{n_k}(t)\}$ è di Cauchy in Y . Per l'ipotesi (i) so che questa ha una s.succ. convergente. Ma essendo di Cauchy converge tutta quanta, e quindi non mi servono ulteriori sottosucc.

Passo 3 Continuità di f_∞ : stessa dim. di prima

Passo 4 Convergenza unif.: come prima sfruttando di nuovo la compattezza di X .

Variante $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ equiuniformità ed equicontinuità
la limitatezza può anche dipendere dal p.to

Allora esiste una s.succ. $f_{n_k} \rightarrow f_\infty$ unif. sui compatti

Dim

- Esiste s.succ. che conv. unif. su $[-1, 1]$
- Esiste s.succ. DELLA PRECEDENTE che conv. unif. su $[-2, 2]$
-
- stessa cosa su $[-k, k]$

Concludo con un PROCEDIMENTO DIAGONALE.

Oss. Lo stesso vale in un contesto metrico se assumo che

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

$\uparrow$
compatti

(ESAUSTIONE DI COMPATTI)

TEOREMA DI PEANO

(Teorema di sola esistenza per pbm. di Cauchy per $u' = f(t, u)$ con f solo continua)

Dimostrazioni

- ① Punto fisso di SCHAUDER (richiede pto fisso di BROWER che a sua volta richiede omologia / coomologia)
- ② Problemi approssimanti
 - 2.1 $\rightarrow$ Approx Lipschitz
 - 2.2 $\rightarrow$ Approx Tonelli
 - 2.3 $\rightarrow$ Approx Eulero esplicita

Lemma misterioso Siano $t_0, u_0, \delta, r, M, R$ come sempre.

Sia $f : R \rightarrow [-M, M]$ continua.

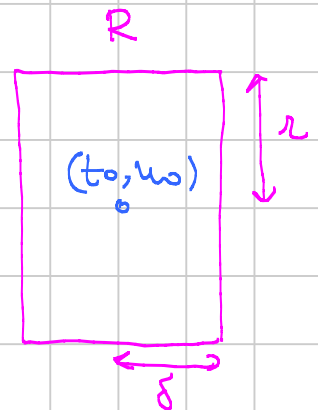
Allora esiste una successione

$$f_n : R \rightarrow [-M, M]$$

tale che

(i) $f_n \rightarrow f$ unif. su R

(ii) $\forall n \in \mathbb{N} \exists L_n$ (dipendente da n) t.c.



$$|f_n(t, u_1) - f_n(t, u_2)| \leq L_n |u_1 - u_2| \quad \forall t, u_1, u_2 \in \dots$$

Dim. di Peano dato il lemma

Invece di risolvere

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

risolvo

$$\begin{cases} u' = f_n(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Ciascuno dei problemi approx. ha soluzione (pure unica)

$$u_n : [t_0, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r]$$

$$\text{con } \delta_1 \leq \delta$$

$$M \delta_1 \leq r$$

La cosa decisiva è che δ_1 NON DIPENDE da n , avendo usato la versione di Cauchy-lip. con tempo di vita δ_1 ottimale, cioè involip. dalla costante L .

Dico che le $\{u_n(t)\}$ verificano le ipotesi di A.A.

- (i) sono equilimitate perché hanno valori su $[u_0 - 2, u_0 + 2]$
- (ii) sono equicontinue perché sono equilipschitz in quanto

$$|u_n'(t)| = |f_n(t, u_n(t))| \leq M$$

↑ indipendente da n

Per A.A. esiste s.succ. che non rinviava t.c.

$$u_n(t) \rightarrow u_\infty(t) \quad \text{unif.}$$

Dico che $u_\infty(t)$ risolve il pbm. limite. Per questo uso la formulazione integrale

$$\begin{array}{ccc} u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f_n(s, u_n(s)) ds & & \\ \downarrow & & \downarrow \leftarrow \text{Hope...} \\ u_\infty(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds & & \end{array}$$

Per passare al limite nell'integrale serve la conv. unif. delle integrande, la quale segue dal fatto generale

$f_n \rightarrow f$ unif. in R + $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. in $[t_0, t_0 + \delta_1]$, allora

$$\underbrace{f_n(s, u_n(s))}_{\text{unif.}} \rightarrow \underbrace{f(s, u_\infty(s))}_{\text{unif.}} \quad \text{unif. in } [t_0, t_0 + \delta_1].$$