

Back to lezione precedente (in realtà è la 104: aggiunto dopo video)

SUBLEMMA Sia X un insieme, e sia $\varphi: X \rightarrow X$.

Sia n un intero tale che $\varphi^{(n)}: X \rightarrow X$ ha un **UNICO** p.to fisso x_0 .
 $\uparrow$ iterate n -esima

Allora x_0 è p.to fisso di φ . (ed è l'unica)

Dim. Per ipotesi $\varphi^{(n)}(x_0) = x_0$. Pongo $\varphi(x_0) = y_0$. Allora

$$\varphi^{(n)}(y_0) = \varphi^{(n)}(\varphi(x_0)) = \varphi(\varphi^{(n)}(x_0)) = \varphi(x_0) = y_0$$

$\uparrow$ Def y_0 $\uparrow$ $\varphi^{(n+1)}$ $\uparrow$ x_0 è fix per $\varphi^{(n)}$ $\uparrow$ Def y_0

Ma allora y_0 è fisso per $\varphi^{(n)}$, e quindi è proprio x_0 .
 — o — o —

Lemma (Proc. diag.: vedi les. su compattezza in sp. metrici)
 Dati sottoinsiemi

$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots$$

tutti **INFINITI**, allora esiste succ. n_k strett. cresc. t.c.

$$n_k \in N_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

[con particolare $n_i \in N_j$ per ogni $j \leq i$]

$\uparrow$ i-completa dopo video

— o — o —

TEOREMA DI ASCOLI-(ARZELÀ) (Versione in $\mathbb{R}$)

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (estremi compresi), e sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni.

Supponiamo che:

(i) f_n è EQUILIMITATA, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) f_n è EQUICONTINUA, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in [a, b]$$

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Allora $\{f_n\}$ ammette una sottosucc. che converge uniforme, cioè esiste una succ. n_k di naturali strett. cresc., ed esiste $f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f_{n_k} \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. in } [a, b].$$

Dim. Fisso un sottoinsieme $D \subseteq [a, b]$ denso e numerabile

- Denso: $\forall t \in [a, b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists d \in D \text{ t.c. } |d - t| < \varepsilon$
- Numerabile $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots\}$

Basta prendere $D := [a, b] \cap \mathbb{Q}$.

Passo 1 Esiste succ. strett. cresc. $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ ed esiste $f_\infty : D \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(d) = f_\infty(d) \quad \forall d \in D.$$

(Convergenza puntuale in D)

Pseudo d₁. Considero $\{f_m(d_1)\}$. Per equiunitarietà è una succ. in $[-M, M]$, quindi ha una sottosucc. convergente

$$f_{m_{i,k}}(d_i) \rightarrow f_{\infty}(d_i)$$

N_1 = indici della prima
s. succ.

Prendo d_2 , considero $\{f_{n_1, k}(d_2)\}$ e questa avrà una nuova sottosucc.

$$f_{n_{2,k}}(d_2) \rightarrow f_{\infty}(d_2)$$

N_2 = involsi della seconda s. succ.

Pseudo $d_3 \dots$

$$f_{m_{3,k}}(d_3) \rightarrow f_{\infty}(d_3)$$

$N_3 =$ involci della terza

La sottosucc. diagonale $f_{m_k, k}$ li accontenta tutti, cioè

$$f_{m_{k,k}}(d_i) \rightarrow f_0(d_i) \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

Riassumendo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		N_0
	1	2	3		5	6		8		10	11	12		N_1
			3		5	6					11	12		N_2
			3			6						11	12	N_3

Passo 2 Posso estendere f ad una funzione

$$f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

e avviene ancora che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{m_k}(t) = f_\infty(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

(Convergenza puntuale su $[a, b]$ usando LA STESSA m_k che ci serviva bene al passo 1).

Considero un qualunque $t \in [a, b]$. Voglio dimostrare che $\{f_{n_k}(t)\}$ è di Cauchy. Se ci riesco avrò un limite che chiamo $f_\infty(t)$.

Idea: $|f_{n_k}(t) - f_{n_l}(t)| \leq |f_{n_k}(t) - f_{n_k}(d)| + \leftarrow \text{piccoli se } t \text{ e } d \text{ sono vicini}$
 $\rightarrow + |f_{n_k}(d) - f_{n_l}(d)| +$
 $+ |f_{n_l}(d) - f_{n_l}(t)| \leftarrow$
 $\text{piccolo se } l \text{ e } k \text{ sono grandi}$

Formalmente

- 1 - mi sono dati $\varepsilon > 0$ e $t \in [a, b]$
- 2 - scelgo il $\delta > 0$ che corrisponde a $\frac{1}{3}\varepsilon$ nella definizione di equicontinuità
- 3 - scelgo $d \in D$ tale che $|t - d| \leq \delta$ (posso per densità)
- 4 - scelgo $k_0 \in \mathbb{N}$ t.c.
 $|f_{n_k}(d) - f_{n_l}(d)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad \forall l \geq k_0$
(posso perché $\{f_{n_k}(d)\}$ è di Cauchy).

Ora per $l \geq k_0$ e $k \geq k_0$ le 3 righe della stima di sopra sono $\leq \frac{1}{3}\varepsilon$. Sommandole ottengo

$$|f_{n_k}(t) - f_{n_l}(t)| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad \forall l \geq k_0.$$

Passo 3 La f_∞ è continua in $[a, b]$. (Per il momento è solo limite puntuale) Dico di più f_∞ ha la stessa relazione ε, δ della equicontinuità.

Infatti, fissato $t_0 \in [a, b]$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ t.c.

$$\begin{aligned} |t - t_0| \leq \delta &\Rightarrow |f_{n_k}(t) - f_{n_k}(t_0)| \leq \varepsilon \quad \forall k \\ &\downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &|f_\infty(t) - f_\infty(t_0)| \leq \varepsilon \\ &\text{(ho usato solo la conv. puntuale)} \end{aligned}$$

Passo 4 Dimostro che $f_{n_k} \rightarrow f_\infty$ uniformemente in $[a,b]$.

Uso molto l'equicontinuità. Dato $\varepsilon > 0$ per ogni $t \in [a,b]$ esiste $B_\delta(t)$ dove

dipende $\uparrow$ da t $|f_m(t) - f_n(s)| \leq \varepsilon \quad \forall s \in B_\delta(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ora $[a,b]$ è compatto e $\{B_{\delta_i}(t_i) : t_i \in [a,b]\}$ sono un ricoprimento aperto, che dunque ammette un s. ricoprimento finito

$$[a,b] := B_{\delta_1}(t_1) \cup \dots \cup B_{\delta_m}(t_m)$$

Voglio dimostrare l'unif. continuità

1 - mi viene dato $\varepsilon > 0$

2 - faccio il discorso di sopra con $\frac{1}{3}\varepsilon$ e trovo il ricoprimento finito.

3 - scelgo $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_{n_k}(t_i) - f_\infty(t_i)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

(posso perché i t_i sono un numero finito)

Il claim è che $|f_{n_k}(t) - f_\infty(t)| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0 \quad \forall t \in [a,b]$

Facile: dato $t \in [a,b]$, scelgo t_i (con $i \in \{1, \dots, m\}$) in modo tale che $t \in B_{\delta_i}(t_i)$ e scrivo

$$|f_{n_k}(t) - f_\infty(t)| \leq |f_{n_k}(t) - f_{n_k}(t_i)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{per come ho scelto il } t_i \text{ t.c. } t \in B_{\delta_i}(t_i)$$

$$+ |f_{n_k}(t_i) - f_\infty(t_i)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{per la scelta di } k_0$$

$$+ \underbrace{|f_\infty(t_i) - f_\infty(t)|}_{= 0} \leq \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{stesso motivo del 1° termine.}$$