

UNICITÀ

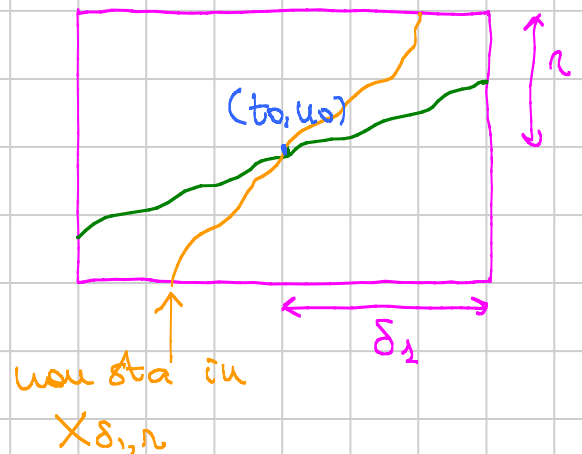
- ① Via contrazioni
- ② Via GRÖNWALL
- ③ Via sopra / sottosoluzioni

Dim. sbagliata: ho ottenuto la soluzione per contrazione, quindi p.to fisso unico, quindi sol. unica. (così si dimostra solo l'unicità in $X_{\delta_1, n}$)

① Sistemazione della dim. sbagliata

Idea: se ci fosse una soluz. diversa definita in $[t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$ con $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, posso considerare la volta in

$$X_{\delta_2, n}$$



Per il teorema sappiamo che è una contrazione in $X_{\delta_2, n}$, il che esclude che questa nuova soluzione sia diversa in $[t_0 - \delta_2, t_0 + \delta_2]$.

Però potrebbero restare attaccate per un po' e poi staccarsi...

Dim. La faccio solo nel futuro. Supponiamo di avere una soluzione $u^{(t)}$ in $[t_0, t_0 + \delta_1]$ e supponiamo di averne un'altra $v^{(t)}$ in $[t_0, t_0 + \delta_2]$ con $\delta_2 < \delta_1$.

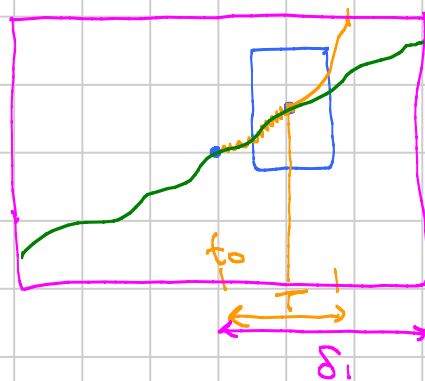
Considero

$$(\delta_1 \leq \delta, \forall \delta_1 \leq n)$$

$$\sup \{ T \in [t_0, t_0 + \delta_2] : u(t) = v(t) \text{ in } [t_0, T] \}$$

Se $T = \delta_2$, allora coincidono sempre. Altrimenti

Per la dimostrazione brutale
di sopra, la soluz. è
localmente unica, cioè
esiste un rettangolo centrato
in $(T, u(T)) = (T, v(T))$
in cui le due soluzioni coincidono ancora.



Questo contraddice la massimalità di T . Questo dice
anche che

$$u(t) = v(t) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_2]$$

LEMMA GRONWALL

(Minimolista)

Siano $t_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $L \geq 0$ e sia $w: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$
Supponiamo che

- (i) w è continua
- (ii) w soddisfa

$$w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Allora

$$w(t) \leq 0$$

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

Dim. 1

Moltiplico l'ipotesi a dx esso per $e^{-L(t-t_0)}$ e porto
tutto al LHS

$$\underbrace{w(t) e^{-L(t-t_0)} - L e^{-L(t-t_0)} \int_{t_0}^t w(s) ds}_{\left[e^{-L(t-t_0)} \int_{t_0}^t w(s) ds \right]'} \leq 0$$

Quindi

$$e^{-L(t-t_0)} \int_{t_0}^t w(s) ds \leq e^{-L(t_0-t_0)} \int_{t_0}^{t_0} w(s) ds$$

Da questo deduco che

$$\forall t \geq t_0$$

$$\int_{t_0}^t w(s) ds \leq 0 \quad \text{e quindi tornando nell'ipotesi}$$

$$w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s) ds \leq 0.$$

— 0 — 0 —

Dim. unicità

Supponiamo di avere due soluzioni $u(t)$ e $v(t)$ del pbm. di Cauchy definite su un intervallo comune $[t_0, t_0 + \delta]$.

Allora abbiamo 2 solus. dell'eq. di Volterra

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

$$v(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds$$

Sottraggo e metto i valori assoluti

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) - f(s, v(s)) ds \right| \\ &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta] \end{aligned}$$

Ponendo $w(t) := |u(t) - v(t)|$ posso applicare Gronwall e ottenere che

ovvia

Lemma

↓

↓

$$0 \leq w(t) \leq 0$$

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

⇒ finché esistono entrambe coincidono!

— 0 — 0 —

Teorema di sola esistenza $\leadsto$ senza ASCOLI-ARZELÀ
solo in Italia

Def. Siano (X, d_x) e (Y, d_y) due spazi metrici.

Sia $f_n: X \rightarrow Y$ una successione di funzioni.

Dico che le f_n sono EQUICONTINUE se

non dip. da n

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x_0 \in X \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in B_{x_0}(\delta)$$

$$d_y(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \varepsilon$$

Teorema (Esercizio - Heine Cantor per successioni)

Tutto come sopra + (X, d_x) compatto.

Allora le f_n sono EQUIUNIFORMEMENTE CONTINUE, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0 \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in B_{x_0}(\delta)$$

$$d_y(f_n(x), f_n(x_0)) \leq \varepsilon.$$

[Di solito si scrive: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in B_x(\delta)$

$$d_y(f_n(x), f_n(y)) \leq \varepsilon \quad]$$

Dim. C'è una dimostrazione via raggio magico (indagare...) ma la più comoda è per assurdo. Nego la tesi

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in X \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists y \in B_x(\delta) \quad d_y(f_n(x), f_n(y)) \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{k}$ e ottengo x_k, n_k, y_k t.c.

$$d_x(x_k, y_k) \leq \frac{1}{k} \quad \text{ma} \quad d_y(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(y_k)) \geq \varepsilon_0$$

A meno di sottosucc.

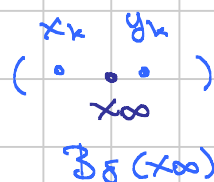
- $x_k \rightarrow x_\infty$
- $y_k \rightarrow x_\infty$ (sulla stessa sottosuccessione)
- n_k o sono costanti oppure $n_k \rightarrow +\infty$

Se gli n_k sono costanti, è la contraddizione classica di Heine-Cantor

Se $n_k \rightarrow +\infty$, mi basta dimostrare che le successioni $f_{n_k}(x_k)$ e $f_{n_k}(y_k)$ hanno lo stesso limite in y , arrivando a negare $d_Y \geq \varepsilon$.

Qui uso l'equicontinuità

Definitivamente x_k e y_k cascano in $B_\delta(x_\infty)$ dove il δ è quello che corrisponde a $\frac{1}{3}\varepsilon_0$ ed x_∞ nella definizione di equicont.



$$\varepsilon_0 \leq d_Y(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(y_k)) \leq \underbrace{d_Y(f_{n_k}(x_k), f_{n_k}(x_\infty))}_{\leq \frac{1}{3}\varepsilon_0} + \underbrace{d_Y(f_{n_k}(x_\infty), f_{n_k}(y_k))}_{\leq \frac{1}{3}\varepsilon_0}$$

Oss. Nella dim. non serve distinguere $n_k \rightarrow +\infty$ o n_k costante.