

Dimostrazioni del teo. esistenza e unicità per eq. diff.Formulazione integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

Equazione di Volterra

 Φ : funzioni $\rightarrow$ funzioni

$$[\Phi(u)](t) = \text{RHS} = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in \dots$$

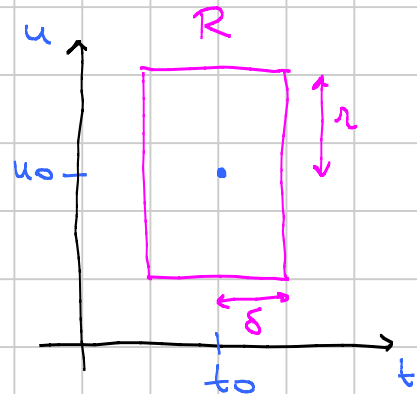
$$M := \sup \{ |f(t, u)| : (t, u) \in R \}$$

① Se $\delta_1 \leq \delta$ e $M\delta_1 \leq r$, allora

$$\Phi: X_{\delta_1, r} \longrightarrow X_{\delta_1, r}$$

"

$$u: [t_0, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r]$$

② Se $L\delta_1 < 1$, allora Φ è una contrazione in $X_{\delta_1, r}$ che è metrico completo $\leadsto$ esistenza di una soluz. (Cauchy-lip.)③ Stima più raffinata del RHS. Siano u e v in $X_{\delta_1, r}$

$$\begin{aligned} |[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L \text{dist}(u, v) ds \end{aligned}$$

da cui

(★)

$$|[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| \leq L \operatorname{dist}(u, v) (t - t_0) \quad \forall t \in \dots$$

Ora si aprono 2 strade

③.1 Introduco le approssimanti di PICARD

$$u_0(t) \equiv u_0 \quad u_{m+1}(t) := [\Phi(u_m)](t)$$

Si verifica che vale questa disuguaglianza

$$|u_{m+1}(t) - u_m(t)| \leq \operatorname{dist}(u, u_0) \frac{L^n (t - t_0)^n}{n!}$$

Dim. Induzione: per $n=0$ è ovvia e il passo induttivo è semplice

$$\begin{aligned} |u_{m+2}(t) - u_{m+1}(t)| &= |[\Phi(u_{m+1})](t) - [\Phi(u_m)](t)| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_{m+1}(s)) - f(s, u_m(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |u_{m+1}(s) - u_m(s)| ds \end{aligned}$$

$$(\text{uso Hp. indutt.}) \rightarrow \leq L^{n+1} \frac{1}{n!} \operatorname{dist}(u, u_0) \int_{t_0}^t (s - t_0)^n ds$$

facendo l'integrale conclude.

Da qui, grazie a $n!$ al denum., si dimostra che $\{u_n(t)\}$ è una succ. di Cauchy in $X_{\delta_1, \epsilon}$, senza ulteriori hp su δ_1 .

A quel p.to si passa al limite

$$\begin{aligned} u_{m+1}(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_m(s)) ds \\ \downarrow \\ u_\infty(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds \end{aligned}$$

③.2 Invece di considerare Φ , considero le sue potenze $\Phi^{(m)}$ (composizione m -volte)

$$\text{dist}(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \delta \cdot L \text{dist}(u, v)$$

Ripartendo da (*) riusciamo a dimostrare che

$$\text{dist}(\Phi^{(m)}(u), \Phi^{(m)}(v)) \leq \frac{(\delta \cdot L)^m}{m!} \text{dist}(u, v)$$

< 1 se m è abbastanza grande

Quindi per m abbastanza grande $\Phi^{(m)}$ è una contrazione, dunque ha un p.to fisso.

Questo fornisce una dim. alternativa che le iterate di Picard convergono. Che un p.to fisso di $\Phi^{(m)}$ lo sia per Φ non è ovvio.

④ $X_{\delta, r, \lambda}$ = stesso spazio di prima
= funzioni $u: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r]$ continue

con una nuova distanza (proveniente da una nuova norma)

$$\text{dist}_\lambda(u, v) := \sup \{ |u(t) - v(t)| e^{-\lambda(t-t_0)} : t \in [t_0, t_0 + \delta] \}$$

Si verifica facilmente (esercizio) che $X_{\delta, r, \lambda}$ è uno spazio metrico completo.

$$\begin{aligned} |[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| &\leq L \int_{t_0}^t |u(s) - v(s)| ds \\ &= L \int_{t_0}^t \underbrace{|u(s) - v(s)| e^{-\lambda(s-t_0)}}_{\leq \text{dist}_\lambda(u, v)} e^{\lambda(s-t_0)} ds \\ &\leq L \text{dist}_\lambda(u, v) \int_{t_0}^t e^{\lambda(s-t_0)} ds \end{aligned}$$

Facendo l'integrale trovo

$$|[\Phi(u)](t) - [\Phi(v)](t)| \leq L \operatorname{dist}_\lambda(u, v) \frac{1}{\lambda} [e^{\lambda(t-t_0)} - 1]$$
$$\leq \frac{L}{\lambda} \operatorname{dist}_\lambda(u, v) e^{\lambda(t-t_0)}$$

Portato l'esponenziale al LHS, e fatto il sup in t , ottengo

$$\operatorname{dist}_\lambda(\Phi(u), \Phi(v)) \leq \frac{L}{\lambda} \operatorname{dist}_\lambda(u, v) \quad \forall u, v \in \dots$$

Basta ora scegliere $\lambda > L$ per avere una contrazione, e quindi un p.to fisso in $X_{\delta, r, \lambda}$ senza ulteriori condizioni su δ .

Una volta che ho il p.to fisso è fatta.

Oss. Queste dimostrazioni funzionano per le equazioni.
Cosa cambia per i sistemi?
Poco o nulla.

$$f: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_r(u_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$X_{\delta, r} = \text{funzioni continue } u: [t_0, t_0 + \delta] \rightarrow \overline{B}_r(u_0)$$

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

↑ ↑ ↑
vettore vettore integrale di una funzione vettoriale

Le stime sono le stesse, solo che i valori assoluti diventano norme su $\mathbb{R}^n$.

Occhio: la stima $\|\int f(s, u(s))\| \leq \int \|f(s, u(s))\|$
è meno ovvia nel caso vettoriale (vedi lezione apposta).

Oss. Discorsi analoghi valgono per equazioni a valori in spazi di Hilbert.

Problema: come definire l'integrale per una funzione a valori in uno spazio vettoriale con una norma.

In maniera elementare, se voglio integrare solo funzioni continue o poco più, posso definirlo alla Riemann, con le partizioni taggate ecc... ecc...

Il teorema fondamentale del calcolo integrale è gratis con questa definizione

— o — o —