

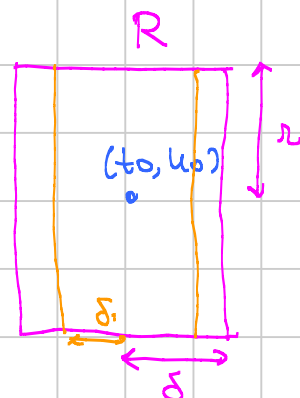
Dim. teo. esistenza e unicità

- ① ESISTENZA ALLA CAUCHY-LIPSCHITZ
- ② ESISTENZA ALLA PICARD-LINDELÖF
- ③ ESISTENZA CON NORME PESATE
- ④ UNICITÀ

① CAUCHY-LIPSCHITZ Siano f, δ, r, t_0, u_0 come nell'enunciato.

Poi siamo

$$M := \max \{ |f(t, u)| : (t, u) \in R \}$$



Sia $\delta_1 > 0$ tale che

$$\delta_1 \leq \delta$$

ovvia

$$\delta_1 \leq \frac{r}{M}$$

non scappare in vert.

foruisse la contrazione

$$\delta_1 < \frac{1}{L}$$

← cost. Lip.

Allora esiste una soluzione $u: [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \rightarrow \mathbb{R}$

$[u_0 - r, u_0 + r]$

Dim. Mi limito a trovare la soluzione in $[t_0, t_0 + \delta_1]$.
Mi basta trovare una soluzione di classe C^0 del problema integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

Considero lo spazio

$$X_{\delta_1, r} := \{ u: [t_0, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r] \text{ di classe } C^0 \}$$

Questo è un Banach rispetto alla solita norma, e quindi un metrico rispetto alla solita distanza

$$\text{dist}(u_1, u_2) := \sup \{ |u_1(t) - u_2(t)| : t \in [t_0, t_0 + \delta_1] \}$$

Considero la funzione $\Phi : X_{\delta, \epsilon} \rightarrow X_{\delta, \epsilon}$ definita così

$$[\Phi(u)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Claim: se δ_1 verifica le 3 disuguaglianze, allora

Φ è definita tra gli spazi scritti sopra ed è una contrazione, quindi essendo $X_{\delta, \epsilon}$ completo ha un punto fisso unico, cioè tale che

$$u = \Phi(u) \quad u(t) = [\Phi(u)](t)$$

che è equivalente alla formulazione integrale.

Ci sono 3 cose da dimostrare

(1) $X_{\delta, \epsilon}$ è completo: fatto tante volte

(2) Φ mappa $X_{\delta, \epsilon}$ in sé. L'unica cosa da verificare è che

$$[\Phi(u)](t) \in [u_0 - \epsilon, u_0 + \epsilon] \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

$$\text{cioè} \quad \left| [\Phi(u)](t) - u_0 \right| \leq \epsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

$$\text{cioè} \quad \left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \leq \epsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

Ora

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u(s))| ds$$

$$\stackrel{\text{def. } M}{\leq} \int_{t_0}^t M ds \leq M \delta_1 \leq \eta$$

$\uparrow$
ipotesi su δ_1

(3) Φ è una contrazione, cioè esiste $\Delta \leq 1$ t.c.

$$\text{dist}(\Phi(u_1), \Phi(u_2)) \leq \underbrace{\Delta}_{< 1} \text{dist}(u_1, u_2) \quad \forall u_1, u_2 \text{ in } X_{\delta_1, \eta}$$

$$|[\Phi(u_1)](t) - [\Phi(u_2)](t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))) ds \right|$$

$$\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| ds$$

$$\stackrel{\text{Lip}}{\leq} L \int_{t_0}^t |u_1(s) - u_2(s)| ds$$

$$\leq L \int_{t_0}^t \text{dist}(u_1, u_2) ds$$

$$\leq \boxed{L \delta_1} \text{dist}(u_1, u_2) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

$\Delta < 1$ per ipotesi su δ_1

Facendo il sup del LHS al variare di $t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$ ottengo la disug.

$$\text{dist}(\Phi(u_1), \Phi(u_2)) \leq \Delta \text{dist}(u_1, u_2).$$

— o — o —

Oss. Il peggior errore possibile è pensare di aver dimostrato anche l'unicità perché il pto fisso è unico.

② **PICARD-LINDELÖF** Sia $\varphi, \delta, r, t_0, u_0, R, L, M$ come prima.

Sia $\delta_1 > 0$ tale che

$$\delta_1 \leq \delta$$

$$\delta_1 \leq \frac{r}{M}$$

Allora esiste una soluzione $u: [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r]$.

(Nessuna ipotesi, stessa tesi)

Dim. Introduco le ITERATE DI PICARD, cioè una succ. di funzioni $u_n: [t_0, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - r, u_0 + r]$ definite per ricorrenza così

$$u_0(t) \equiv u_0$$

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

$$u_{n+1}(t) := u_0 + \int_{t_0}^t \varphi(s, u_n(s)) ds$$

(Idea: se $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$, allora ho il p.to fisso come voluto)

Dimostro che intanto tutte le $u_n(t)$ hanno immagine in $[u_0 - r, u_0 + r]$ (è lo stesso conto di prima).

Voglio dim. che $\{u_n(t)\}$ è di Cauchy rispetto a dist.

$$\text{Dico che } |u_n(t) - u_{n-1}(t)| \leq \frac{L^n (t - t_0)^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall t \in [t_0, t_0 + \delta_1]$$

Inoltrazione

Aggiunto dopo video:
manca costante, vedi
LEZIONE 10!

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t) - u_n(t)| &= \left| \int_{t_0}^t \varphi(s, u_n(s)) - \varphi(s, u_{n-1}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |\varphi(s, u_n(s)) - \varphi(s, u_{n-1}(s))| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \int_{t_0}^t L |u_n(s) - u_{n-1}(s)| ds \\
& \leq \int_{t_0}^t L \cdot \frac{L^n (s-t_0)^n}{n!} ds = \frac{L^{n+1}}{n!} \int_{t_0}^t (s-t_0)^n ds \\
& = \frac{L^{n+1}}{n!} \frac{1}{n+1} \left[(s-t_0)^{n+1} \right]_{t_0}^t = \frac{L^{n+1}}{(n+1)!} (t-t_0)^{n+1}
\end{aligned}$$

Passo iniziale:

$$|u_1(t) - u_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, u_0) ds + \cancel{u_0} - \cancel{u_0} \right| \dots$$

Aggiunto dopo video: vedi LEZIONE 104 per sistemazione disuguaglianza.

Conclusione data la stima:
dalla stima segue che

$$|u_{n+1}(t) - u_n(t)| \leq \frac{L^{n+1} \delta_1^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ma allora per $n \geq n \geq n_0$ avremo che

$$\begin{aligned}
|u_m(t) - u_n(t)| & \leq |u_m(t) - u_{m-1}(t)| + |u_{m-1}(t) - \dots| + \dots \\
& \leq \frac{L^m \delta_1^m}{m!} + \dots + \frac{L^{n+1} \delta_1^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k \geq n+1} \frac{L^k \delta_1^k}{k!}$$

La serie con questo termine converge qualunque siano L e δ_1 , quindi la sua coda tende a 0, quindi è $< \varepsilon$ per $n \geq n_0$

Una volta che $\{u_n(t)\}$ è di Cauchy, esiste

$$u_\infty : [t_0, t_0 + \delta_1] \rightarrow [u_0 - 1, u_0 + 1]$$

tale che $u_n(t) \rightarrow u_\infty(t)$ uniformemente

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds & & \\ \downarrow \text{(basta puntuale)} & \downarrow & \downarrow \\ u_\infty(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_\infty(s)) ds & & \end{array}$$

Ora se $u_n \rightarrow u_\infty$ unif. e $f(t, u)$ è continua, allora

$$f(s, u_n(s)) \rightarrow f(s, u_\infty(s)) \text{ unif. in } [t_0, t_0 + \delta_1] \text{ e}$$

quindi anche in $[t_0, t]$

quindi posso scambiare limite e integrale.