

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

TEORIA:

- ESISTENZA LOCALE → teo. contrazioni (completezza)
- approssimazione (compattezza)
- UNICITÀ → teo. contrazioni
- Lemma di GRONWALL
- sopra / sottosoluzioni
- ESISTENZA GLOBALE → teo. alternativa + stime sulle soluzioni

ESERCIZI

- Studio qualitativo delle soluzioni (disegnare la soluzione senza saper risolvere l'equazione) per equazioni di ordine 1
- Equazioni di ordine 2
- Sistemi di più equazioni.

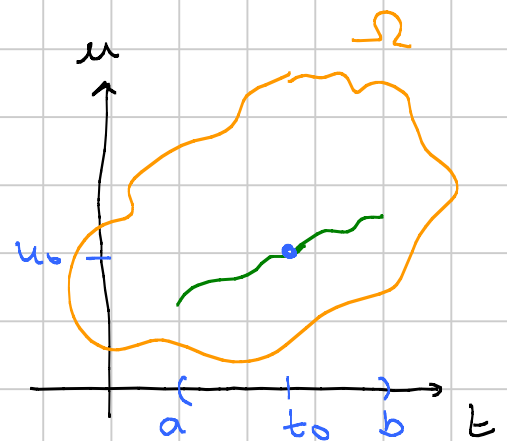
Riepilogo notazioni

$$u' = f(t, u)$$

eq. diff. in forma normale

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$



Risolvere il problema di Cauchy vuol dire trovare

$u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
 ↑ è tra le incognite

- $u \in C^1((a, b))$
- $t_0 \in (a, b)$ e $u(t_0) = u_0$
- $(t, u(t)) \in \Omega \quad \forall t \in (a, b)$
- $u'(t) = f(t, u(t))$

Un sistema di eq. diff. ha lo stesso aspetto con la diff. che $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

• $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$
come prima

• $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 t u

• $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$

Fatto generale Una equazione di ordine n

$$u^{(n)} = f(t, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$$

La posso sempre trasformare in un sistema di ordine 1

$\begin{aligned} u_1 &= u \\ u_2 &= u' \\ &\vdots \\ u_n &= u^{(n-1)} \end{aligned}$ <u>funzioni di t</u>	$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_n' &= f(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{aligned}$
---	---

$U' = F(t, U)$

Conseguenza: basta fare la teoria per sistemi di ordine 1

Oss. "Se so risolvere nel futuro, allora so risolvere nel passato"

Supponiamo $u: [t_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione con $u(t_0) = u_0$

$u: (a, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione con $u(t_0) = u_0$

Allora ricollando ho una soluzione $u: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

Nota bene: basta assumere u continua in $[t_0, b)$ e $(a, t_0]$
 u derivabile in (t_0, b) e (a, t_0)
e automaticamente sarà derivabile in (a, b)

Dim. Bisogna solo dir. che u è derivabile in t_0 .

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h u'(t_0 + c(h))}{h}$$

Lagrange

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t_0 + c(h), u(t_0 + c(h)))$$

$= f(t_0, u_0)$ ← serve solo che u è continua in t_0 .

Stesso discorso per $R \rightarrow 0^-$ da cui $u'(t_0) = f(t_0, u_0)$.

FORMULAZIONE INTEGRALE

Assumo sempre f continua

(Pb-Diff.) $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

(Pb-Int.) $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$

PROPOSIZIONE I seguenti due problemi sono equiv.

① Trovare $u \in C^0([t_0, b)) \cap C^1((t_0, b))$ che risolva (Pb-Diff.) in $[t_0, b)$

② Trovare $u \in C^0([t_0, b))$ che soddisfa (Pb-Int) su $[t_0, b)$.

Dim. ① $\Rightarrow$ ② Allora u ha già ben più della regolarità che serve. Integrando l'eq. diff. in $[t_0, t]$ ottengo

$$u'(t) = f(t, u(t)) \rightsquigarrow \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$
$$\quad\quad\quad "$$
$$u(t) - u(t_0)$$
$$= u(t) - u_0$$

② $\Rightarrow$ ① Devo mostrare 2 cose: eq. diff. + condizione in t_0 .

Sostituisco t_0 : $u(t_0) = u_0 + \int_{t_0}^{t_0} \dots = u_0$

Osservo che $f(t, u(t))$ è continua, quindi $u(t)$ che ne è una primitiva è C^1 e la sua derivata è proprio

$$\underbrace{u'(t)}_{\text{---}} = \underbrace{f(t, u(t))}_{\text{---}} \quad \text{eq. diff.}$$

Teorema di esistenza e unicità LOCALE

Consideriamo il solito problema di Cauchy $\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$

Supponiamo $\delta > 0, r > 0, f: \underbrace{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [u_0 - r, u_0 + r]}_R \rightarrow \mathbb{R}$

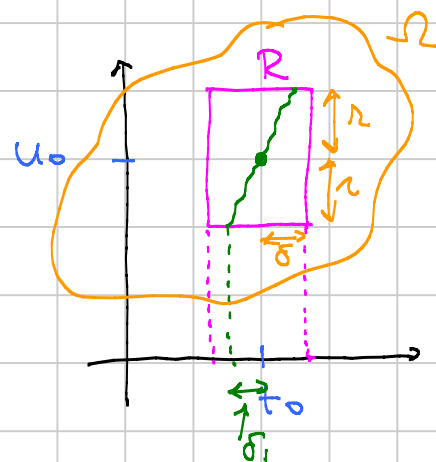
Supponiamo

(i) f continua in R

(ii) f lipschitziana in u , unif.

rispetto a t , in R , cioè
esiste $L \geq 0$ tale che

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L |u_1 - u_2|$$



$$\forall t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \quad \forall (u_1, u_2) \in [u_0 - r, u_0 + r]^2$$

Allora esiste $\delta_1 \in (0, \delta]$ ed esiste un'unica funzione $u: [t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1] \rightarrow \mathbb{R}$ che risolve il problema

Esempio classico $\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$ la soluzione è $u(t) = \frac{1}{1-t}$



Teorema di sola esistenza LOCALE Tutto come sopra, ma senza l'ipotesi (ii).

Allora stessa tesi tranne l'unicità.

Esempio (classico di non unicità)

$$\begin{cases} u' = 3|u|^{\frac{2}{3}} \\ u(0) = 0 \end{cases} \leftarrow \text{continua ma non Dip. in un intorno di } u_0 = 0$$

Il problema ammette infinite soluzioni.
Due si vedono subito:

$$\begin{aligned} u(t) &\equiv 0 \\ u(t) &= t^3 \end{aligned}$$

In realtà ho famiglia a 2 parametri

$$u(t) = \begin{cases} (t-c_2)^3 & t \geq c_2 \\ 0 & t \in [-c_1, c_2] \\ (t+c_1)^3 & t \leq -c_1 \end{cases}$$

— 0 — 0 —

