

Esercizio (Grande classico)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^a}{1+n^2 x^2} \quad \text{dove } a \text{ è un parametro } a > 0$$

Parte standard: dimostrare che $f \in C^1((0, +\infty))$ per ogni $a > 0$

Dim. Intanto la serie conv. puntualmente per ogni $x \geq 0$
 (per $x=0$ è ovvio, per $x>0$ confr. asint. con $\frac{1}{n^2}$)
 Dico che la serie converge unif. sui cpt. di $(0, +\infty)$
 cioè in tutti gli intervalli $[A, B]$ con $0 < A < B$.
 Questo mi darebbe la continuità su $(0, +\infty)$.
 Per dim. spero nella totale

$$\sup_{x \in [A, B]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [A, B]} \frac{x^a}{1+n^2 x^2} \leq \frac{B^a}{1+n^2 A^2}$$

↑
num. + grande
denom. + piccolo

Ora $\sum \frac{B^a}{1+n^2 A^2} < +\infty \Rightarrow$ ho conv. unif. per M-test di Weierstrass

Per l'essere C^1 spero nella serie delle derivate

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{a x^{a-1} (1+n^2 x^2) - 2n^2 x \cdot x^a}{(1+n^2 x^2)^2} \\ &= \frac{a x^{a-1} + (a-2) n^2 x^{a+1}}{(1+n^2 x^2)^2} \end{aligned}$$

Come prima $\sup_{x \in [A, B]} |f'_n(x)| \sim \frac{n^2}{n^4} \Rightarrow$ tutto ok

Domande più serie: calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

① Se $a > 2$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\underbrace{f(x)}_{\rightarrow +\infty} \geq f_+(x) = \frac{x^a}{1+49x^2}$$

$\downarrow$
 $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$

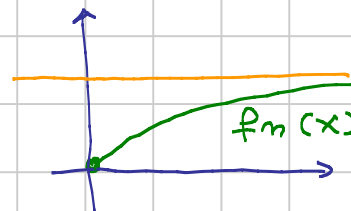
Non ho usato i teoremi di scambio.

② Se $a = 2$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Vorrei tanto poter usare il teorema di scambio, ma per farlo mi serve convergenza unif. in $[A, +\infty)$ per un qualche $A > 0$.

$$\sum \underbrace{\frac{x^2}{1+n^2x^2}}_{f_n(x)}$$

$\sup_{x>0} f_n(x)$ provo a calcolarlo



Studio $f_n(x)$ usando la derivata fatta prima.

$$f'_n(x) = \frac{a x^{a-1} + (a-2) n^2 x^{a+1}}{(1+n^2 x^2)^2}$$

se $a = 2$ è $f'_n(x) > 0$

$$\text{Ma allora per } a = 2 \quad \sup_{x>0} f_n(x) = \frac{1}{n^2}$$

$\Rightarrow$ c'è convergenza uniforme in $(0, +\infty)$

$\Rightarrow$ vale il teorema di scambio.

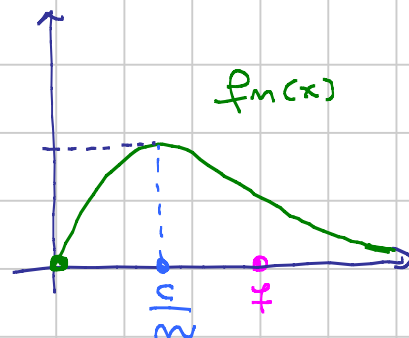
Tra l'altro anche $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ per il te. di scambio a $x \rightarrow 0^+$.

③ Se $a < 2$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Studio nuovamente di $f_n(x)$

$$f_n'(x) = \frac{x^{a-1} [a - (2-a)m^2 x^2]}{(\dots)^2}$$

Definitivamente $f_n(x)$ sono decrescenti in $[7, +\infty)$, quindi

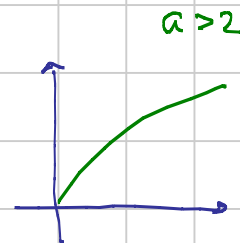


$$\sup_{x \geq 7} f_n(x) = f_n(7) = \frac{7^a}{1 + 48n^2} \leadsto \text{serie convergente}$$

$\Rightarrow$ conv. unif. in $[7, +\infty)$ $\Rightarrow$ teo. di scambio $\Rightarrow \text{😊}$

④ Per $a \geq 2$ è facile che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

Infatti le $f_n(x)$ sono crescenti, quindi

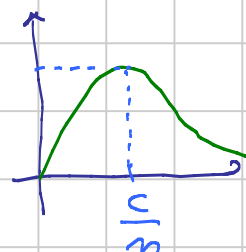


$$\sup_{x \in (0, 7]} f_n(x) = f_n(7) = \text{come prima} \leadsto$$

$\Rightarrow$ conv. unif. in $(0, 7]$ $\Rightarrow$ teo. di scambio a $0^+ \Rightarrow \text{😊}$

⑤ Per $a < 2$ non è più vero che sono crescenti

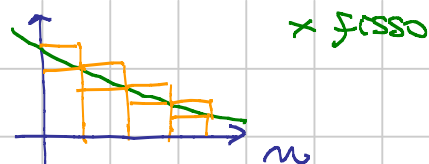
$$f_n\left(\frac{c}{n}\right) = \frac{\left(\frac{c}{n}\right)^a}{1 + n^2 \frac{c^2}{n^2}} = \frac{c^a}{1 + c^2} \frac{1}{n^a}$$



$\Rightarrow$ per $a > 1$ ho conv. unif. in $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ teo. di scambio, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \quad \text{Per } a > 1$$

⑥ Per $a=1$ il $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}$$

CONFRONTO SERIE - INTEGRALE

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+y^2 x^2} dy &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+y^2 x^2} dy \\ &= [\arctan(xy)]_{y=1}^{y=+\infty} &= [\arctan(xy)]_{y=0}^{y=+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan x \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Questo mostra che $f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ per $x \rightarrow 0^+$.

Oss. Per il confronto serie integrali è fondamentale che fissato x si ha che $f_n(x)$ è monotono in n .

⑦ Per $a < 1$ si ha che $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$$f(x) = \frac{1}{x^{1-a}} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2 x^2}}_{\frac{\pi}{2}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $\frac{\pi}{2}$

Ho anche serie di infinitesimo e parte principale.

— 0 — 0 —

Esercizio

$$u(t, x) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{e^{-n^2 t} \sin(nx) \cdot a_n}_{f_n(t, x)}$$

dove

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

① u è continua in $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$
 $t \quad x$

$$|f_n(t, x)| \leq |a_n| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ la serie converge unif. $\Rightarrow$ il limite è ben definito e continuo.

② u_t è continua in $[A, +\infty) \times \mathbb{R}$ per ogni $A > 0$

$$\begin{aligned} |\partial_t f_n(t, x)| &= |-n^2 e^{-n^2 t} \sin(nx) a_n| \\ &\leq n^2 |a_n| e^{-n^2 A} \end{aligned}$$

$\leadsto$ se $A > 0$ la serie converge $\Rightarrow \partial_t f_n$ conv. unif.

$\Rightarrow u_t$ è continua in $[A, +\infty) \times \mathbb{R}$

$\Rightarrow u_t \in C^0((0, +\infty) \times \mathbb{R})$

③ u_x è continua in $[A, +\infty) \times \mathbb{R}$ per ogni $A > 0$

Stessa dim. di sopra

④ Per lo stesso motivo $u \in C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{R})$

⑤ La funzione $u(t, x)$ verifica

$$u_t(t, x) = u_{xx}(t, x) \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Le due derivate esistono e sono somma della stessa serie!

— o — o —