

Calcolo somma serie di potenze

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n+3} \quad R=1$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n+3}$$

$x^3 = y$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+3} = \frac{1}{y^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+3}}{n+3}$$

$$= \frac{1}{y^3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \frac{1}{y^3} \left(\underbrace{-\log(1-y)}_{\text{serie se partiva da } n=1} - y - \frac{y^2}{2} \right)$$

Torno in x e ottengo

$$= x \frac{1}{x^3} \left(-\log(1-x^3) - x^3 - \frac{x^6}{2} \right) = \frac{1}{x^2} (\dots)$$

Achtung! Il termine $\frac{1}{x^2}$ sotto non deve preoccupare, perché il numeratore è di ordine 3, quindi avanza 1.

Esempio 2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{(2n)!}$ intanto converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

Sembra un po' $\cos x$. Pongo $x = y^2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{y^4}{4!} + \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} + \dots = \cos y - 1 - \frac{1}{2} y^2$$

$$= \cos \sqrt{x} - 1 - \frac{1}{2} x$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{7^n}{(2n)!} = \cos \sqrt{7} - 1 - \frac{7}{2} \quad (\text{oss. } R = +\infty)$$

— 0 — 0 —

Esercizio 3 $\sum \frac{2^3+3^3}{4^3+5^3} x^3$ $R = \frac{3}{5}$ ($L = \frac{3}{5}$)

Esercizio 4 $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2}$

Chi è c_n Non è $c_n = n!$

$$c_n = \begin{cases} k! & \text{se } n = k^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi il limite che devo fare è $\sqrt[n^2]{n!} = 1$ (Analisi 1)

$$\sqrt[n]{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} \quad n \rightarrow 1$$

BEGIN {BRUTAL} (Eulero...)

Passo 1 $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-1} + \dots = 0$ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ radici

$$\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2 = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k)^2 - 2 \sum \lambda_i \lambda_j$$

$$= \frac{a_{k-1}^2}{a_k^2} - 2 \frac{a_{k-2}}{a_k} = \frac{a_{k-1}^2 - 2 a_k a_{k-2}}{a_k^2}$$

Passo 2 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_k x^k = 0$

$$\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \dots + \frac{1}{\lambda_k^2} = \frac{a_1^2 - 2 a_0 a_2}{a_0^2}$$

Infatti $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k}$ sono le radici del polinomio $a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots$

Passo 3 Facciamo finta che lo stesso valga per le serie di potenze

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$$

Le radici sono $\lambda_k = \pi k$ con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\text{Somma } \Pi \text{ reciproci radici} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 k^2} = \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{a_0^2} = \frac{1}{3}$$

$\uparrow$ $\pm k$ $\uparrow$ formula $\begin{matrix} 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ a_1^2 & -2a_0 a_2 & a_0^2 \end{matrix}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

END {BRUTAL MODE}

Esercizio 5

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$
 $\forall x \in (-1, 1)$

Dim. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Posso derivare k volte per il teo. di scambio

$$f^{(k)}(x) = \left(\sum \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} k! \binom{n}{k} x^{n-k}$$

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)^{(k)} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

$\uparrow$ indagine

$$= k! \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$$

Esercizio 6

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

$$n^2 = 2 \frac{n^2}{2} = 2 \frac{n^2 - n + n}{2}$$

$$= 2 \binom{n}{2} + \binom{n}{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} x^n$$

$$= 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} x^{n-1}$$

$\downarrow$ esercizio 5

Oss. Allo stesso modo si trova $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n$
 $\uparrow$ polinomio in n

Esercizio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n+4}{n^2+4n+3}}_{\text{"}} x^n$

$\frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+1}$ e ciascuno di questi lo so fare.

Esercizio 8 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$

Come posso stimare $|f^{(k)}(x)|$ all'interno del raggio di conv.?

Sia $L := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora supponendo $L \in (0, +\infty)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad |a_n| \leq M_\varepsilon (L + \varepsilon)^n$$

(analisi 1)

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n k! \binom{n}{k} x^{n-k} \right| \\ &\leq k! \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \binom{n}{k} |x|^{n-k} \\ &\leq \underset{(L+\varepsilon)^k}{M_\varepsilon k!} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} (L+\varepsilon)^{n-k} |x|^{n-k} \\ &= M_\varepsilon k! (L+\varepsilon)^k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} [(L+\varepsilon)|x|]^{n-k} \\ &= M_\varepsilon k! (L+\varepsilon)^k \frac{1}{[1 - (L+\varepsilon)|x|]^{k+1}} \\ &= M_\varepsilon k! \frac{1}{[1 - (L+\varepsilon)|x|]} \frac{1}{\left[\frac{1}{L+\varepsilon} - |x|\right]^k} \end{aligned}$$

Il giorno in cui vado a scrivere
la serie di Taylor in $x = x_0$
i coeff. sono

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \sim M_\varepsilon \frac{1}{\dots} \left[\frac{1}{\frac{1}{L+\varepsilon} - |x_0|} \right]^k = \alpha_k$$

Quale è il raggio di convergenza di

$$\sum a_n (x-x_0)^n$$

Basta osservare che $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{\text{" "}} \frac{1}{\frac{1}{L+\varepsilon} - |x_0|}$ in realtà

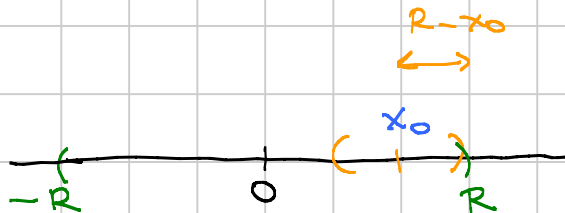
noi essere rigorosi

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\frac{1}{L+\varepsilon} - |x_0|} \quad \forall \varepsilon > 0$$

Ma allora è vera anche per $\varepsilon = 0$, quindi

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{\frac{1}{L} - |x_0|} = \frac{1}{R - |x_0|}$$

$\Rightarrow$ il raggio di conv. della serie centrata in x_0 è $\geq R - |x_0|$



Cosa dovrai dimostrare? Che la somma della serie nuova è la stessa funzione, ma questo si può fare usando il criterio di analiticità come fatto alla let. precedente.
(viene con un raggio + piccolo).

— o — o —