

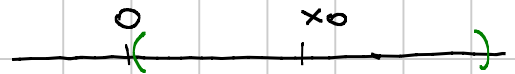
Esercizio Dimostrare che $f(x) = \frac{1}{x}$ è analitica in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Oss. Ricorda $\frac{1}{1+x}$ che è analitica almeno in $(-1, 1)$, quindi $f(x)$ è analitica almeno in $(0, 2)$, ma non ci basta.

Calcolo la derivata k-esima: $f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}$.

Scelto un pto $x_0 \neq 0$, wlog $x_0 > 0$,
la serie di Taylor diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{x_0^{n+1}} \cdot \frac{1}{n!} (x-x_0)^n$$



Questa ha $R = x_0$ ($\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow \frac{1}{x_0} = L \leadsto R = \frac{1}{L}$)

Ho dim. che la serie converge, ma mi serve che converga a $f(x)$.

Metodo 1 Uso il criterio di analiticità: se

$$|f^{(k)}(x)| \leq M \frac{k!}{r^k} \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

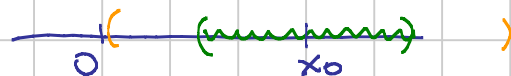
allora f è analitica in $(x_0 - r, x_0 + r)$

$$|f^{(k)}(x)| = \frac{k!}{x^{k+1}} \leq M \frac{k!}{r^k}$$

$$\text{vera} \Leftrightarrow \frac{1}{(x_0 - r)^{k+1}} \leq \frac{M}{r^k}$$

Qui la serie di Taylor converge a $f(x)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{r}{x_0 - r} \right)^k \leq M (x_0 - r)$$



$\uparrow$ serve ≤ 1

$$r \leq x_0 - r$$

$$r \leq \frac{x_0}{2}$$

Questo comunque basta.

Metodo 2 Uso fruccosamente la geometria

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0 + (x - x_0)} = \frac{1}{x_0} \frac{1}{1 + \frac{x - x_0}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{(-1)^n \frac{(x - x_0)^n}{x_0^n}}^{(-y)^n}$$

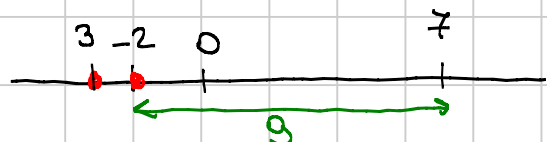
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}} (x - x_0)^n$$

y $\uparrow$
 per $y \in (-1, 1)$, cioè $|x - x_0| < x_0$

Questo mostra direttamente la convergenza in $(0, 2x_0)$

Variaute $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ $x_0 = 7$

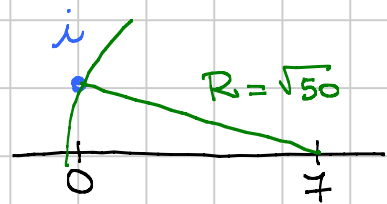
Dico: $f(x)$ è analitica in $\mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$ e la serie di Taylor con centro in $x_0 = 7$ ha $R = 9$

$$f(x) = \frac{A}{\underbrace{x+2}_{R=9}} + \frac{B}{\underbrace{x+3}_{R=10}}$$


Quindi è la somma di 2 volte l'esempio precedente

Variaute $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $x_0 = 7$ $R = \sqrt{50}$

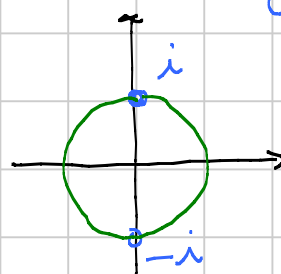
$$f(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{-1}{x+i} + \frac{1}{x-i} \right)$$



Posso svilupparla come prima $\frac{1}{x-i} = \frac{1}{7 + (x-i-7)}$

$$= \frac{1}{7} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{x-i-7}{7}}_y}$$

Oss. Il raggio di conv. della serie di Taylor di $\arctan x$ con centro in $x_0 = 0$ è 1



Prop. (Rigidità delle funzioni analitiche)

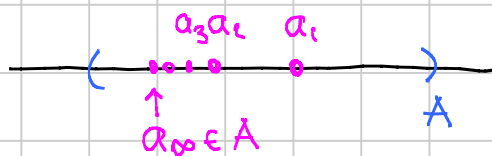
Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto connesso, e sia $f \in C^\omega(A)$, e sia f non identicamente nulla.

Allora $\{x \in A : f(x) = 0\}$ non ha pti di accumulazione in A

Corollario Se due funzioni analitiche coincidono su una successione convergente, allora coincidono ovunque

Se $f(a_n) = g(a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$



Achtung! $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ è analitica per $x \neq 0$ (composiz. di funzioni analitiche)

Gli zeri di $f(x)$ sono una succ. che converge, ma $0 \notin A$

Dim. Prop. Basta dim. che ogni zero di $f(x)$ è isolato.

Supponiamo wlog $x_0 = 0$ e $f(0) = 0$. Voglio trovare $r > 0$ t.c. $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in (-r, 0) \cup (0, r)$

Sviluppo in serie

$$f(x) = \underbrace{a_k}_{\neq 0} x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \dots = x^k \underbrace{(a_k + a_{k+1} x + \dots)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{per } x \neq 0}} \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{analitica e} \\ \text{in particolare CONTINUA}}}$$

$g(0) \neq 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$ in un intorno di 0.

— 0 — 0 —

Quello che ho dimostrato è una forma di alternativa

→ 0 x_0 è isolato

→ 0 $f(x) \equiv 0$ in un intorno di x_0

— 0 — 0 —

Esercizio

Sia $f(x)$ analitica in $(-2,2)$

Supponiamo $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in (-2,2)$

Allora esistono $\alpha \in (0,1)$ e $M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f'(x)| \leq M [f(x)]^\alpha \quad \forall x \in [-1,1]$$

Dim. Divido e spero

$$g(x) = \frac{|f'(x)|}{[f(x)]^\alpha} \quad \text{per gli } x \text{ t.c. } f(x) \neq 0$$

Prima osservo che dove $f(x_0) = 0$ anche $f'(x_0) = 0$ perché x_0 sarebbe pto di min. e quindi è tutto ok qualunque siano M ed α

I pti in cui f si annulla in $[-1,1]$ sono un numero finito.

In ognuno di questi pti c'è un ordine di annullamento.

Prendo $\alpha = \frac{1}{2}$. Voglio far vedere che $g(x)$ ha limite finito in tutti i pti di annullamento di $f(x)$.

Sia x_0 un pto di annullamento. Allora $f(x) \sim a_k (x-x_0)^k$
 $f'(x) \sim k a_k (x-x_0)^{k-1}$

Ma allora

$$g(x) = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|^{1/2}} \sim \frac{|k a_k (x-x_0)^{k-1}|}{|a_k (x-x_0)^{k/2}|}$$

$k-1 \geq \frac{k}{2}$
quindi liminf e limsup sono FINITI !!!

Senza che $k \geq 2$ (se fosse $k=1$ f cambierebbe segno).