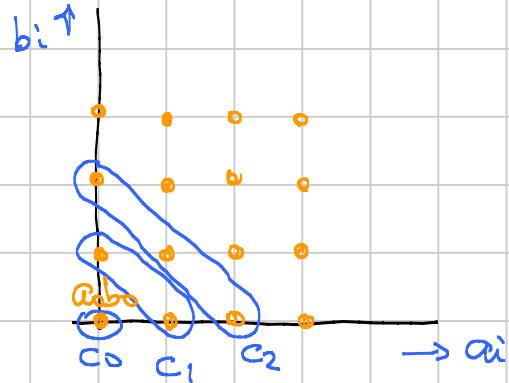


Parantesi di Analisi 1: PRODOTTO DI CAUCHY DI SERIE

Siano date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Il loro prodotto è $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dove

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$



Brutalmente: $(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$
 $= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{c_1} + \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{c_2} + \dots$

Speranza: se $\sum a_n = A_\infty$ e $\sum b_n = B_\infty$, allora

$$\sum c_n = A_\infty \cdot B_\infty$$

In generale è falso, ma è vero se una delle due (almeno) è assolutamente convergente.

Esempio $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Le serie convergono (Leibnitz) ma non assolutamente.

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}} \end{aligned}$$

Dico che $|c_n| \rightarrow 0$, quindi manca la cond. nec.

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} \sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad |c_n| \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} = 1$$

Teorema Supponiamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A_{\infty} \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B_{\infty} \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$$

Allora, definiti i c_n come sopra, si ha $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A_{\infty} B_{\infty}$

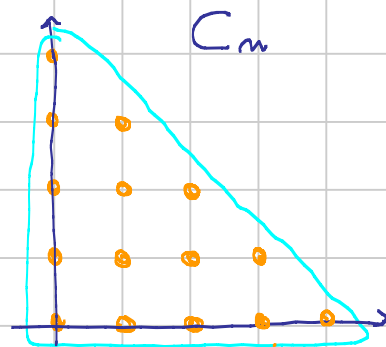
Dim. Siano C_n le somme parziali di $\sum c_n$

$$C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

↑
per
colonne

$$= \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \quad (b_n := b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

$$= \sum_{k=0}^n a_{n-k} (b_k - B_{\infty}) + \underbrace{B_{\infty} A_n}_{A_{\infty} \cdot B_{\infty}} \quad (A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n)$$



A siamo quindi ridotti a dim. che

$$\sum_{k=0}^n |a_{n-k}| \cdot |b_k - B_{\infty}| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Idea:

$$\sum_{k=0}^n |a_{n-k}| \cdot |b_k - B_{\infty}| = \sum_{k=0}^{m_0} \underbrace{|a_{n-k}| \cdot |b_k - B_{\infty}|}_{\substack{\uparrow \\ \text{piccoli se} \\ n-k \text{ è molto} \\ \text{grande}}} + \sum_{k=m_0+1}^n |a_{n-k}| \cdot |b_k - B_{\infty}|$$

↑
piccoli se
 m_0 è grande

Cerco di formalizzare in modo ordinato

① mi viene dato $\varepsilon \geq 0$

② Scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ tale che, posto $\hat{A} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, si abbia

$$|b_k - B_{\infty}| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\hat{A} + 1} \quad \forall k \geq m_0$$

③ Pongo $\hat{B} := \max_{k \in \mathbb{N}} |B_k - B_\infty|$ (esiste perché $B_k \rightarrow B_\infty$)

e scelgo $l_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_i| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\hat{B}+1} \quad \forall i \geq l_0$

(posso perché $|a_i| \rightarrow 0$)

④ Pongo $m_0 = m_0 + l_0$ e dimostro che la somma che mi interessa è $\leq \varepsilon$ per ogni $m \geq m_0$

$$\sum_{k=m_0+1}^m |a_{m-k}| \cdot |B_k - B_\infty| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\hat{A}+1} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|}_{\hat{A}} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\hat{A}+1}$$

$$\sum_{k=0}^{m_0} |a_{m-k}| \cdot |B_k - B_\infty| \leq \frac{1}{2} \varepsilon.$$

$\geq m_0 - m_0 = l_0$

$$\leq \frac{1}{2} \varepsilon \frac{1}{\hat{B}+1}$$

Questo dimostra che va a 0.

— 0 — 0 —

Corollario Il prodotto di due serie di potenze è una serie di potenze che converge al prodotto delle somme

Dim. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n x^n}_{\alpha_n} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{b_n x^n}_{\beta_n}$

$$\gamma_m = \sum_{k=0}^m \alpha_k \beta_{m-k} = \sum_{k=0}^m a_k x^k b_{m-k} x^{m-k} = x^m \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$$

La serie prodotto è la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ con $c_n =$

Questa serie, all'interno del raggio di convergenza delle due serie di partenza, converge a $f(x)g(x)$.

(all'interno del raggio convergono entrambe assolutamente).

COROLLARIO

Il prodotto di due funzioni analitiche è analitico.

Dati.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

c_n dovrebbe diventare $\frac{[f(x)g(x)]^{(n)}}{n!}$ calcolata in $x=0$

Per calcolare la derivata n -esima di un prodotto si calcola con la FORMULA DI LEIBNITZ

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Ora

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \quad \frac{n!}{n!} \rightarrow \text{fuori} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{serie prodotto} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0) \\ &= \frac{1}{n!} [f \cdot g]^{(n)} \end{aligned}$$

Quindi i coeff. della serie prodotto, che sappiamo convergere a $f(x) \cdot g(x)$, sono proprio le derivate del prodotto diviso il fattoriale.

Esercizio

$$e^x \cdot e^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^n \right)$$

Moltiplico le 2 serie $= \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ dove

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k \cdot \frac{1}{(n-k)!} y^{n-k} \quad \frac{n!}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \frac{1}{n!} (x+y)^n \end{aligned}$$

Quindi

$$e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$

Oss. In questo modo uno potrebbe

→ definire la funzione e^x come somma della serie

→ riottenere la proprietà $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ come conseguenza del prodotto di serie.

Oss. Tutta la teoria delle serie di potenze si può fare con $x \in \mathbb{C}$ invece di $x \in \mathbb{R}$, e volendo pure i coeff $\in \mathbb{C}$. L'assoluta convergenza è sostituita dalla convergenza delle norme.

Quindi allo stesso modo posso definire l'esponentiale con esponente $x+iy \in \mathbb{C}$ e vale

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

↑
vero
 e^x

↑
se metto iy nella serie viene

$$\cos y + i \sin y$$

↑ ↑
definiti come somma
della loro serie.

— 0 — 0 —