

FUNZIONI ANALITICHE

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Allora f si dice analitica in A se $f \in C^\infty(A)$ e per ogni $x_0 \in A$ esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq A$ e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

sviluppo di Taylor di
 $f(x)$ in centro in $x = x_0$

omega
↓

L'insieme delle funzioni analitiche in A si indica con $C^\omega(A)$

Oss. $f \in C^\infty \not\Rightarrow f \in C^\omega$ in generale. Esempio classico

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

Si vede che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (vedi analisi 1), quindi in nessun intervallo $(-r, r)$ può essere $f(x) =$ somma serie di Taylor (questa viene).

Teorema 1 Le serie di potenze sono funzioni analitiche all'interno del raggio di conv. (in $(-R, R)$).

Non solo, quando
noi mettiamo in x_0 , la
nuova serie di Taylor
ha raggio di convergenza
almeno $R - |x_0|$.



— o — o —

Criteri di analiticità

Come dimostro che una certa $f(x)$ è analitica

CRITERIO GENERALE

Supponiamo $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$,
 $f \in C^\infty((x_0 - r, x_0 + r))$.

Supponiamo che esista una costante M tale che

$$\sup \{ |f^{(k)}(x)| : x \in (x_0 - r, x_0 + r) \} \leq M \frac{k!}{r^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Allora f è analitica in $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Dim. Dato per buono il teorema 1, ci basta dim. che la serie di Taylor di f con centro in $x = x_0$ converge nell'intervallo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Voglio dimostrare che la sua somma è $f(x)$.

Uso Taylor Lagrange

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$\uparrow$ $\swarrow$
somma parziale della serie misterioso

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} M \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} (x - x_0)^{n+1}$$

$$= M \left(\frac{x - x_0}{r} \right)^{n+1}$$

$\downarrow$ 0 perché esponenziale con base $\in (-1, 1)$

— 0 — 0 —

Oss. Non ho in realtà usato il teorema 1

Corollario 1 Supponiamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Supponiamo che per ogni $A > 0$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

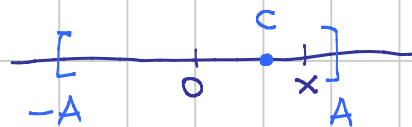
$$|f^{(k)}(x)| \leq M \quad \forall x \in [-A, A], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Allora f è analitica su tutto $\mathbb{R}$

Dim. Stessa di prima

$$|f(x) - P_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \overbrace{|f^{(n+1)}(c)|}^{\leq M \text{ in } [-A, A]} \cdot |x - x_0|^{n+1}$$

$$\leq M \underbrace{\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}}_{\downarrow 0}$$



Conseguenza: le funzioni

e^x

$\sin x$

$\cos x$

sono analitiche su tutto $\mathbb{R}$.

Oss. La funzione $\frac{1}{1-x}$ è analitica in $(-1, 1)$

La sua serie di Taylor è $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ e questa è una geometria

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \rightsquigarrow f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \rightsquigarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 1$$

Nota bene: Non puoi usare i criteri precedenti per dimostrare l'analiticità di questa $f(x)$.

Come dimostro che $f(x) = \log(1+x)$ è analitica?

Non posso usare i criteri di prima.

Uso che $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ (conto di prima)

Voglio dim. che
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Questo segue dal teorema di scambio della derivata:

chiamo $S_n(x)$ le somme parziali della serie del $\log(1+x)$

So che

$$S_m'(x) \rightarrow \frac{1}{1+x} = f'(x) \quad (\text{conv. unif. su } [-A, A] \text{ per ogni } 0 < A < 1)$$

$$S_m(o) \rightarrow 0 = f(o) \quad (\text{conv. in un punto})$$

$$\Rightarrow S_n(x) \rightarrow f(x) \text{ unif. on } [-A, A] \text{ per ogni } 0 < A < 1.$$

$f(x) = \arctan x$ é analítica intanto em $(-1, 1)$

Basta guardare $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

Ora faccio la primitiva

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ è analitica su $(-1, 1)$.

Devo dim. che $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n =: p(x)$

Non si può usare il criterio. Pongo $g(x) := \frac{\varphi(x)}{(1+x)^\alpha}$

Osservo che $g(0) = 1$. Se dimostro che $g(x)$ è costante sono ok.
Calcolo la derivata

$$g'(x) = \frac{\varphi'(x)}{(1+x)^\alpha} - \varphi(x) \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} = \frac{(1+x)\varphi'(x) - \alpha\varphi(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}$$

Claim: $(1+x)\varphi'(x) = \alpha\varphi(x) \quad \forall x \in (-1, 1)$

$$(1+x)\varphi'(x) = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n$$

shift degli
indici

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} (n+1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{n+1} (n+1) + \binom{\alpha}{n} n \right] x^n = \alpha \varphi(x).$$

$$\binom{\alpha}{n+1} (n+1) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)n!} + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} n$$

$$= \alpha \binom{\alpha}{n}$$

— 0 — 0 —

Def. Una funzione analitica si dice **INTERA** se il raggio di convergenza della serie di Taylor in un punto è $+\infty$ (e di conseguenza del teo. 1 il raggio è $+\infty$ in tutti i punti).

Esempi: e^x , $\sin x$, $\cos x$ sono intere

$\log(1+x)$, $\arctan x$, $(1+x)^\alpha$ no.

— 0 — 0 —