

SERIE DI POTENZE

Def. Una serie di potenze è una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

↑
coeff.

(Brutalmente: polinomio di grado ∞)

Domande: ① Per quali x converge, e come converge
② A cosa converge, cioè calc. la somma esplicitamente

Oss. Per $x=0$ la serie converge sempre, e la somma fa c_0

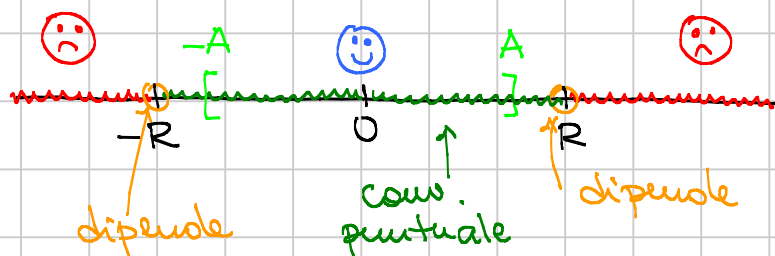
Teorema 1 (Raggio di convergenza) Esiste $R \in [0, +\infty]$ con questa proprietà ↑ incluso

(1) per ogni x con $|x| < R$ la serie converge, anzi converge assolutamente. Ancora meglio per ogni $A < R$ la serie converge totalmente, dunque unif., in $[-A, A]$.

(2) Per ogni x con $|x| > R$ la serie non converge, anzi non verifica nemmeno la cond. necessaria

(3) Per $x = \pm R$ dipende dai casi (indipend. in $\pm R$)

Oss. La situazione si può riassumere così



Casi speciali

- ① Se $R = +\infty$, allora converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ e conv. unif. sui compatti
- ② Se $R = 0$, allora converge solo per $x = 0$.

Teorema 2 (Formula per il raggio di conv.)

Il raggio di conv. è dato dalla formula

$$R = \frac{1}{L} \quad (\text{con l'accordo che } \frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0)$$

dove

$$L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Teorema 3 (Teorema di Abel) Supponiamo $R \in (0, +\infty)$.

Supponiamo che una serie di potenze converga anche per $x = R$. Allora converge unif. in $[0, R]$, e quindi in particolare la somma è continua in tutto $[0, R]$.

Stessa cosa per l'estremo $-R$.

Teorema 4 (Regolarità della funzione limite)

Supponiamo $R \in (0, +\infty]$.

Allora la somma di una serie di potenze è una funzione di classe C^∞ in $(-R, R)$ e posso calcolare tutte le derivate per serie, quindi in particolare "è la serie di Taylor di se stessa".

Brutalmente: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad f(0) = c_0$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad f'(0) = c_1$$

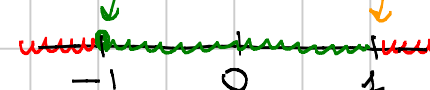
$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \quad f''(0) = 2c_2$$

... per induzione $f^{(k)}(0) = k! c_k \quad \leadsto \quad c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serie di potenze con $c_n = \frac{1}{n}$

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \quad \leadsto \quad R = \frac{1}{L} = 1$$

SI NO



Quindi abbiamo

→ conv. puntuale in $[-1, 1)$

→ conv. tot., quindi unif. in $[-A, A]$ per ogni $A \in (0, 1)$

→ Abel $\Rightarrow$ conv. unif. in $[-1, 0]$ (ma non totale)

e di conseguenza conv. unif. su tutti i compatti

$$K \subseteq [-1, 1)$$

Ora la serie scritta è la serie di Taylor di

$$f(x) = -\log(1-x)$$

Grazie al lemma 4, sappiamo che la somma della serie è $f(x)$ per tutti gli x per cui conv. puntualmente, quindi

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \quad \forall x \in [-1, 1)}$$

Perciò $x = -1$ ho trovato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots = -\log 2$$

— 0 — 0 —

Analogamente: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

Sembra il caso $x = 1$ di $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

che è la serie di Taylor di $\arctan x$, e quindi dove converge converge ad $\arctan x$. La zona di convergenza è $(-1, 1]$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

Considero la serie di potenze $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$
con l'idea di porre $x = \frac{1}{3}$.

→ Dove converge? $L=1 \leadsto R=1 \leadsto (-1, 1)$
(negli estremi manca la cond. necessaria)

$\leadsto x = \frac{1}{3}$ è OK.

→ Cerco di vedere la serie data come serie di Taylor di q.c.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'$$

teo. scambio

$$= x \left(\frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= x \frac{1-x+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$= x (1 + x + x^2 + \dots)$$

$$= x \cdot \frac{1}{1-x}$$

geometrica

Mettendo $x = \frac{1}{3}$ ottengo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{1}{3} \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

Oss. ① Da ricordare

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}$$

$$\forall x \in (-1, 1) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

② Se voglio $\sum_{k=0}^{\infty} k x^k$ conviene procedere allo stesso modo.