

SERIE DI FUNZIONI

Setting: S insieme, $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ succ. di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad (\text{somma di infinite funzioni})$$

Possiamo definire le somme parziali

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Diciamo che la serie conv. punt. / unif. a seconda che $S_n(x)$ conv. punt. / unif. ad una certa $S_{\infty}(x)$ che si dice somma delle serie.

Operativamente: $\rightarrow$ conv. punt. = studio di una serie parametrica

$\rightarrow$ conv. unif. = spesso difficile da studiare se uno non conosce S_{∞} .

Def. Si dice che una serie converge **TOTALMENTE** (NORMAL CONVERGENCE) se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \} < +\infty$$

numeri reali ≥ 0 , quindi è una serie che può solo convergere o div. a $+\infty$

Vantaggio: valgono le implicazioni

$$\text{conv. TOTALE} \Rightarrow \text{conv. UNIF.} \Rightarrow \text{conv. PUNTUALE}$$



Proposizione (Weierstrass M-test)

Sono fatti equivalenti

(i) la serie converge totalmente

(ii) esiste una successione M_n di numeri reali t.c.

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$$

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in S$$

Dim. Ovvio

$\Rightarrow$ Prendo $M_n := \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \}$

$\Leftarrow \sup \{ \dots \} \leq M_n$ e si chiude per confronto.

Dim. che TOTALE $\Rightarrow$ UNIFORME

Poniamo $M_n := \sup \{ |f_n(x)| : x \in S \}$.

Supponiamo che ci sia la totale. Fissiamo $x \in S$. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

quindi il LHS converge, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ conv. assolutamente

quindi converge. Questo mostra che esiste il limite puntuale.

Ora dall'analisi 1 sappiamo che, detta $S_{\infty}(x)$ la somma, vale

$$\begin{aligned} |S_{\infty}(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \end{aligned}$$

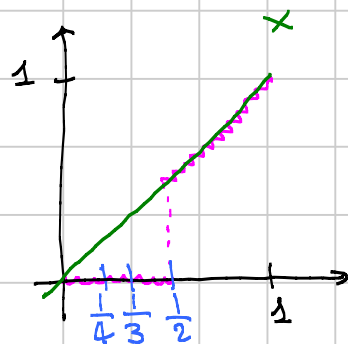
Poichè la serie degli M_k converge: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$\forall n \geq n_0$ il RHS $\leq \varepsilon$ per ogni $x \in S$. Questa è la conv. unif.

Oss. Può esserci conv. unif. SENZA conv. totale anche se tutte le $f_n(x)$ sono ≥ 0 .

L'idea è che si possono prendere i supporti di $f_n(x)$ disgiunti tra di loro

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Per costruzione $\sum f_n(x)$ converge a x e ci converge uniform. perché

$$x - S_n(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n+1}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quindi $|x - S_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Non c'è conv. totale perché $\sup \{|f_n(x)| : x \in [0, 1]\} = \frac{1}{n}$

e $\sum \frac{1}{n}$ non converge.

— 0 — 0 —

Prop. (Cond. nec. per la conv. uniforme di una serie)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ conv. unif. in } S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \{|f_n(x)| : x \in S\} = 0$$

Operativamente: se il sup non tende a 0, addio conv. unif.

Dim. Conv. unif. della serie $\Rightarrow S_n(x) \rightarrow S_\infty(x)$ unif.

$$\Rightarrow \underbrace{S_n(x) - S_{n-1}(x)}_{f_n(x)} \rightarrow 0 \text{ unif.} \Rightarrow f_n(x) \rightarrow 0 \text{ unif.}$$

$$\Rightarrow \sup \{|f_n(x)| : x \in S\} \rightarrow 0$$

— 0 — 0 —

Caso utile: serie a segno alternato stile Leibnitz

Consideriamo una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n(x) \quad x \in S$$

Supponiamo che

(i) $\varphi_n(x) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in S$

(ii) $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in S$.

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_n(x) \text{ conv. unif. in } S \iff \sup\{\varphi_n(x) : x \in S\} \rightarrow 0.$$

Dim. $\Rightarrow$ è la cond. uce. appena enunciata

$\Leftarrow$ La convergenza puntuale è il criterio di Leibnitz. Mi serve d' uniforme.

Dalla dim. di Leibnitz di analisi 1 (rivedere) segue che

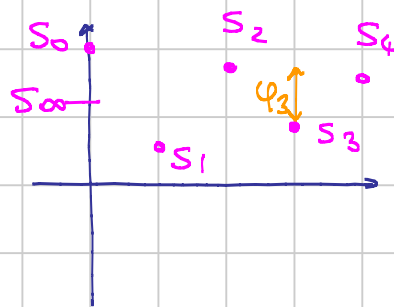
$$|S_{\infty}(x) - S_n(x)| \leq \varphi_n(x) \quad \forall x \in S$$

quindi

$$\sup_{x \in S} |S_{\infty}(x) - S_n(x)| \leq \sup_{x \in S} \varphi_n(x)$$

$\downarrow$
0, il che è equiv.

alla conv. unif.



Teorema Sia V uno sp. di Banach. Sia u_n una succ. in V .

Allora

serie di numeri

serie di vettori

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ conv.}$$

Dim. Poissano

$$S_m := v_0 + v_1 + \dots + v_m$$

$$\hat{S}_m := \|v_0\| + \|v_1\| + \dots + \|v_m\|$$

Osserviamo che per ogni $m > n$ vale la stima

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\| &= \|v_m + \dots + v_{m+1}\| \\ &\leq \|v_m\| + \dots + \|v_{m+1}\| = \overbrace{\hat{S}_m - \hat{S}_n}^{\geq 0} \end{aligned}$$

Ora $\sum \|v_m\| < +\infty \Rightarrow \{\hat{S}_n\}$ è di Cauchy

disug.
precedente

$\Rightarrow \{S_n\}$ è di Cauchy

$\Rightarrow S_n$ converge

$\Rightarrow \sum v_n$ converge

legame con quanto detto prima è chiaro

$V = \text{Bounded}(S, \mathbb{R})$ con la solita dist

Allora conv. unif. è equivalente alla convergenza in V rispetto a dist.

La convergenza totale è equivalente alla convergenza delle norme di $f_n(x)$, la norme che indichiamo dist

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in S\}$$