

CONVERGENZA UNIFORME SUI COMPATTI

Def. Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni, e sia $f_\infty : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Si dice che

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. sui compatti}$$

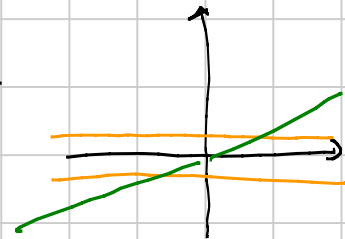
$$\text{se } f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } [-A, A] \text{ per ogni } A > 0.$$

Achtung!

$$\forall A \quad f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } [-A, A] \not\Rightarrow f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } \mathbb{R}$$

Esempio $f_n(x) = \frac{x}{n}$. È ovvio che $f_n(x) \rightarrow 0$ puntualm.

e conv. unif. sui compatti, ma non unif. in $\mathbb{R}$



Oss. Se $f_n \rightarrow f$ unif. sui compatti
e f_n è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$,
posso dedurre che f_∞ è continua su tutto $\mathbb{R}$?

Sì, perché la cont. è un fatto LOCALE: se f_∞ è cont. in $[-A, A]$ per ogni $A > 0$, allora lo è su tutto $\mathbb{R}$.

Oss. ① $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in A e $B \subseteq A \Rightarrow f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in B
↑
ok

② $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in A
 $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $B \Rightarrow f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $A \cup B$
↑
ok, perché si può solo 2
o un numero finito

Oss. Se $f_n \rightarrow f_\infty$ ^{unif.} in $[-A, A]$ per ogni $A > 0$, allora
 $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in K per ogni $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto
 $K \subseteq [-A, A]$ per qualche A .

Oss. La defniz. di conv. unif. sui cpt. vale in generale in
un metrico (X, d) .

$f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in K per ogni $K \subseteq X$ compatto

Valgono le stesse proprietà di sopra.

Esercizio $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Supponiamo che

(i) $f_n' \rightarrow g_\infty$ unif. su $\mathbb{R}$ (controlla le derivate)

(ii) $f_n(0) \rightarrow \tau$ (controlla le funzioni)

Cosa posso dedurre? Posso dedurre che esiste $f_\infty: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in $\mathbb{R}$

NO! $f_n(x) = \frac{1}{n}x + \tau$ $f_n'(x) \rightarrow 0$ unif. in $\mathbb{R}$

$f_n(0) \rightarrow \tau$

ma $f_n(x)$ non conv. unif. in $\mathbb{R}$ a $f_\infty(x) \equiv \tau$.

Posso solo dedurre, dal teo. scambio derivata, che

$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ unif. sui compatti

dove $f_\infty(x) := \tau + \int_0^x g_\infty(t) dt$, quindi $f_\infty'(x) = g_\infty(x)$

Esercizio Siano $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dei polinomi di grado ≤ 3 .

Supponiamo che esista $f_\infty: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$p_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \quad \text{puntuale.}$$

Allora $f_\infty(x)$ è un polinomio di grado ≤ 3 e la convergenza è unif. sui compatti.

Anzi di più: posso indebolire l'ipotesi richiedendo

$$p_n(x) \rightarrow p_\infty(x) \quad \text{solo per 4 valori di } x.$$

Dim 1: bovina I 4 valori siano x_0, x_1, x_2, x_3 . I polinomi siano

$$p_n(x) = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n x^3$$

Vorrei tanto che i coeff. avessero limite.

I coeff. dipendono dai valori $(p_n(x_0), p_n(x_1), p_n(x_2), p_n(x_3))$ mediante l'inversa di una matrice di Vandermonde

$$W \cdot \text{coeff} = \text{vettore} \rightsquigarrow \text{coeff}_n = W^{-1} \cdot \text{vettore}_n$$

Se $\text{vettore}_n \rightarrow \text{vettore}_\infty$, allora $\text{coeff}_n \rightarrow \text{coeff}_\infty$

Dalla convergenza dei coeff. segue la conv. unif. sui cpt:

$$|p_\infty(x) - p_n(x)| \leq \underbrace{|b_\infty - b_n|}_{\leq A} \cdot |x| + \underbrace{|c_\infty - c_n|}_{\leq A^2} \cdot |x|^2 + \underbrace{|d_\infty - d_n|}_{\leq A^3} \cdot |x|^3$$

Riassunto:

conv. su 4 pti $\Rightarrow$ conv. dei coeff. $\Rightarrow$ conv. unif. sui cpt

DIM 2 (Astratta) Voglio dim. che convergono i coeff.

Sia $R_{\leq 3}[x]$ lo sp. vett. dei polinomi di grado ≤ 3 su $\mathbb{R}$.
Dato

$$p \in R_{\leq 3}[x] \quad p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

definisco

$$\|p\|_1 := \max \{|a|, |b|, |c|, |d|\}$$

Si dimostra facilmente che $\|p\|_1$ è una norma in $R_{\leq 3}[x]$.

Dato un intervallo $[-A, A]$ definisco

$$\|p\|_2 := \max \{|p(x)| : x \in [-A, A]\}$$

Anche questa è una norma su $R_{\leq 3}[x]$.

Dati 4 pti (x_0, x_1, x_2, x_3) definisco

$$\|p\|_3 := \max \{|p(x_0)|, |p(x_1)|, |p(x_2)|, |p(x_3)|\}$$

Sorpresona: anche questa è una norma. L'unica cosa non ovvia è che $\|p\|_3 = 0 \Rightarrow p(x) \equiv 0$, ma questo segue dal fatto che i pol. sono determinati dai valori in 4 pti ^{↑ di grado ≤ 3}

Ma in uno spazio di dim. finita tutte le norme sono equivalenti, quindi

$$\begin{aligned} \text{conv. in 4 pti} &\Rightarrow \text{conv. in } \|\cdot\|_3 \Rightarrow \text{conv. in } \|\cdot\|_2 \\ &\Rightarrow \text{conv. unif. in } [-A, A] \end{aligned}$$

Spazi di funzioni

- $C^0([a,b], \mathbb{R})$ è metrico completo rispetto a

$$\text{dist}(f, g) := \max \{ |f(x) - g(x)| : x \in [a,b] \}$$

e la metrica induce la conv. unif

↑
distanza che deriva
da una norma

È anche uno sp. di Banach

- Bounded $([a,b], \mathbb{R})$ è metrico completo rispetto a dist
funzioni
limitate
(def. con il sup)

- Stessa cosa se hai due pti prec. c'è un metrico completo in ambo

- $C^0((a,b), \mathbb{R})$ non è metrico rispetto a dist, perché dist può non essere definita

- Bounded $((a,b), \mathbb{R})$ è metrico completo risp. a dist.

- $C^1([a,b], \mathbb{R})$ è metrico rispetto a dist, ma non è completo, perché il limite unif. di C^1 non è detto che sia C^1

$$f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad [a,b] = [-1, 1]$$

(Un sottoinsieme di un
completo è completo $\Leftrightarrow$
è chiuso)

- $C^1([a,b], \mathbb{R})$ è metrico
completo rispetto alla

$$\text{dist}_1(f, g) := \max \{ |f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)| : x \in [a,b] \}$$

Convergere in dist_1 vuol dire $\underbrace{f_n \rightarrow f_\infty}_{=0} \text{ e } \underbrace{f'_n \rightarrow g_\infty}_{=f'_\infty}$ (= f'_∞).