

CONV. PUNTUALE $\Rightarrow$ CONV. UNIFORME (SOTTO HP. DI MONOTONIA)

TEOREMA (Monotonia in n ad x fisso) (DINI'S THEOREM)

Sia (X, d) uno spazio metrico, sia $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni, sia $f_\infty: X \rightarrow \mathbb{R}$ l.c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x) \quad \forall x \in X \quad (\text{conv. puntuale})$$

Supponiamo che

- (i) (X, d) sia compatto
- (ii) f_∞ è continua
- (iii) f_n è continua per ogni $n \in \mathbb{N}$
- (iv) per ogni $x \in X$ la succ. $n \rightarrow f_n(x)$ è debolm. monotona
(anche $\nearrow$ o $\searrow$ a seconda di x)

Allora

$$f_n \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. in } X.$$

Esempi per mostrare che le Hp sono necessarie

Hp (i) serve: $X := [0, 1)$ $f_n(x) := x^n$

Hp (ii) serve: $X := [0, 1]$ $f_n(x) := x^n$

Hp (iii) serve: $X := [0, 1]$

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Oss. Di solito nelle applicazioni serve la conv. unif. per dim. la continuità di $f_\infty(x)$. Qui invece viene assunta.

Dim. Andiamo in ordine

① Ci è dato $\varepsilon > 0$. Vogliamo trovare $\bar{m}_0$ t.c....

② Per ogni $x \in X$ esiste $m_x \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_m(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall m \geq m_x$$

(segue dalla conv. puntuale)

③ Avuto m_x dal passo precedente, fissato $r_x > 0$ t.c.

$$|f_\infty(y) - f_\infty(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in B_{r_x}(x) \quad (\text{cont. } f_\infty)$$

$$|f_{m_x}(y) - f_{m_x}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in B_{r_x}(x) \quad (\text{cont. } f_{m_x})$$

Claim: $|f_\infty(y) - f_m(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in B_{r_x}(x) \quad \forall m \geq m_x$

Supponiamo $f_m(y) \nearrow$

$$|f_\infty(y) - f_m(y)| = f_\infty(y) - f_m(y) \leq f_\infty(y) - f_{m_x}(y) =$$

$$= \underbrace{f_\infty(y) - f_\infty(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{f_\infty(x) - f_{m_x}(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{f_{m_x}(x) - f_{m_x}(y)}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon$$

Se invece $f_m(y) \searrow$: $|f_\infty(y) - f_m(y)| = f_m(y) - f_\infty(y)$

$$\leq f_{m_x}(y) - f_\infty(y) \text{ e come prima}$$

④ Considero $B_{r_x}(x)$ al variare di x : sono un ricoprimento aperto di X che è compatto, quindi esiste s.ric. finito

$$X = B_{r_1}(x_1) \cup \dots \cup B_{r_k}(x_k)$$

Prendo $\bar{m}_0 := \max \{m_{x_1}, \dots, m_{x_k}\}$ e ho la tesi perché
ogni $y \in X$ casa in qualche

$$\xrightarrow{0} \xrightarrow{0} \xrightarrow{0} B_{n_i}(x_i).$$

Oss. Molte dim. in letteratura assumono monotonia nello
stesso verso per ogni $x \in X$, ma NON SERVE.

$$\xrightarrow{0} \xrightarrow{0} \xrightarrow{0}$$

TEOREMA (Monotonia in x ad n fisso)

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una
succ. di funz., sia $f_\infty : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{conv. puntuale})$$

Supponiamo che

(i) $[a, b]$ compatto (serve che ci siano gli estremi e sia limit.)

(ii) f_∞ continua in $[a, b]$,

(iii) per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $x \rightarrow f_n(x)$ è debolm. monot.
(anche da parti diverse al variare di $n \in \mathbb{N}$)

Allora

$$f_n \rightarrow f_\infty \quad \text{unif. in } [a, b].$$

Oss. Le ipotesi servono

Serve (i) : $[a, b] = [0, 1)$

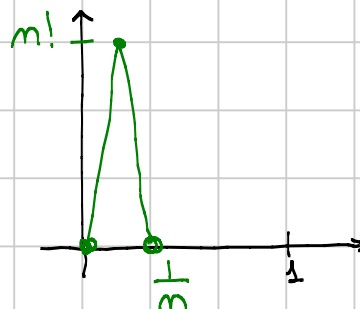
$$f_n(x) := x^n$$

Serve (ii) : $[a, b] = [0, 1]$

$$f_n(x) := x^n$$

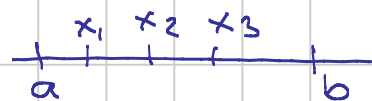
Serve (iii) : $[a, b] = [0, 1]$

Manca monotonia ad n fisso
e ad x fisso.



Dim. Andiamo in ordine.

- ① Ci è dato $\varepsilon > 0$ e cerchiamo $\bar{m}_0 \in \mathbb{N}$ t.c....
- ② Prendiamo $\delta > 0$ che nell'unif. continuità di f_∞ corrisponde ad $\varepsilon/2$. (cont. di f_∞ + $[a, b]$ compatto)
- ③ Scegliamo punti (int. div.)



$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

tali che $|x_i - x_{i-1}| \leq \delta$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

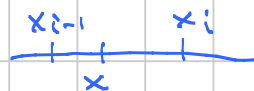
- ④ Scegliamo $\bar{m}_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_\infty(x_i) - f_m(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per ogni } i = 0, \dots, k \\ \forall m \geq \bar{m}_0$$

(uso conv. puntuale)

Claim $|f_\infty(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall m \geq \bar{m}_0$

Supponiamo $f_m(x) \nearrow$ (in x) e supponiamo



$$f_\infty(x) - f_m(x) \leq f_\infty(x) - f_m(x_{i-1})$$

$$= \underbrace{f_\infty(x) - f_\infty(x_{i-1})}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{f_\infty(x_{i-1}) - f_m(x_{i-1})}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$$

$$f_\infty(x) - f_m(x) \geq f_\infty(x) - f_m(x_i)$$

$$= \underbrace{f_\infty(x) - f_\infty(x_i)}_{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{f_\infty(x_i) - f_m(x_i)}_{\geq -\frac{\varepsilon}{2}} \geq -\varepsilon$$

Questo mostra che $|f_\infty(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq \bar{m}_0$

Nel caso in cui $f_m(x) \nearrow$ basta invertire gli estremi per ottenere le stesse disuguaglianze.

— o — o —

Oss. La monotonia può avere versi diversi a seconda di n .

È ancora vero però che f_∞ sarà debolmente monotona. I tipi di monot. sono solo due, quindi ci sarà una sottosucc. $f_{m_k}(x)$ con una direzione fissa, wlog $\nearrow$. Allora

$$f_{m_k}(y) \geq f_{m_k}(x) \quad \text{per ogni } y > x \text{ in } [a, b]$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$f_\infty(y) \geq f_\infty(x)$$

Limite puntuale di funzioni monotone (anche a caso) è monotono.

(Se sono una s.succ. $\nearrow$ e una s.succ. $\searrow$ vuol dire che il limite è costante).

— o — o —