

TEOREMA DI SCAMBIO DEI LIMITI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto, sia $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni, e sia $f_\infty: A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f_n \rightarrow f \quad \text{unif. in } A$$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ (ma vale anche in $\overline{\mathbb{R}}$) un pto di accumulazione di A .
Supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = l_n \in \mathbb{R}$$

Allora

- (1) la successione l_n ha un limite l_∞
- (2) vale lo scambio

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x) = l_\infty$$

(il limite della funzione
limite è il limite dei limiti)

Dica Per dimostrare che $\{l_n\}$ ha limite basta far vedere che è di Cauchy.

Fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in A, \forall n \geq n_0.$$

Presi comunque $n \geq n_0$ e $m \geq n_0$ si ha che

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_\infty(x)| + |f_\infty(x) - f_m(x)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Passando al limite per $x \rightarrow x_0$ otteniamo

$$|l_n - l_m| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

che mostra che $\{l_n\}$ è di Cauchy.

Dovrò dimostrare che $f_\infty(x) \rightarrow l_\infty$ per $x \rightarrow x_0$.

Informale: $|f_\infty(x) - l_\infty| \leq$

$$\begin{aligned} &\leq |f_\infty(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l_\infty| \leq \varepsilon \\ &\quad \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \qquad \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad \qquad \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ &\quad \text{per } n \text{ grande} \qquad \text{per } x \text{ vicino} \qquad \text{per } n \text{ grande} \\ &\qquad \qquad \qquad \text{ad } x_0 \end{aligned}$$

Per rendere il discorso formale bisogna precisare l'ORDINE delle scelte.

① Fisso $\varepsilon > 0$

② Scelgo un indice n tale che

$$|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in A$$

$$|l_n - l_\infty| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Successoramente,
definitivamente,
quindi ho ∞
indici n a
disposizione

③ Dopo aver scelto n fisso $\delta > 0$ (che dipende da n ma non importa) tale che

$$|f_n(x) - l_n| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in [A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)] \setminus \{x_0\}$$

Il conto scritto sopra mi dice che

$$|f_\infty(x) - l_\infty| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [A \cap (\dots)] \setminus \{x_0\}$$

che è quello che volevo.

Corollario Se $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue e $f_n \rightarrow f_\infty$ unif. in A , allora f_∞ è continua

Dim. La continuità di $f_n(x)$ in un certo x_0 ci dice che

$$\begin{array}{ccc} f_n(x_0) & = & \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \\ \downarrow & & \downarrow \text{(Teo. di scambio)} \\ f_\infty(x_0) & = & \lim_{x \rightarrow x_0} f_\infty(x) \end{array}$$

— o — o —

Altro modo di scrivere l'enunciato:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

— o — o —

Oss. Il teorema di scambio vale anche per i limiti a $\pm \infty$ con dim. analoga.

— o — o —

Teorema di scambio in contesto metrico

Siano (X, d_x) e (Y, d_y) due spazi metrici. Sia $x_0 \in X$ un pto di accumulazione per X .

Sia $f_n : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y$ una succ. di funzioni e sia $f_\infty : X \setminus \{x_0\} \rightarrow Y$ tale che

$$f_n(x) \rightarrow f_\infty(x) \text{ unif. in } X \setminus \{x_0\}$$

Supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$y \ni l_n := \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Supponiamo inoltre che Y sia COMPLETO

Allora

(1) $\{l_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{Y}$, quindi $l_n \rightarrow l_\infty$

(2) vale $\lim_{x \rightarrow x_\infty} f_\infty(x) = l_\infty$.

Dim. Esattamente la stessa. Nel punto (1) serve la completezza di $\mathbb{Y}$. Nel punto (2) le triangolari si fanno con $d_\mathbb{Y}$.

Esercizio Data $f_n \rightarrow f_\infty$
 $x_n \rightarrow x_\infty$

quando posso dedurre che

$$f_n(x_n) \rightarrow f_\infty(x_\infty).$$

Risposta: servono due ipotesi

- convergenza uniforme
- continuità del limite.

Brutal mode:

$$\begin{aligned} |f_\infty(x_\infty) - f_n(x_n)| &\leq |f_\infty(x_\infty) - f_\infty(x_n)| + |f_\infty(x_n) - f_n(x_n)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ per } \text{continuità di } f_\infty \quad \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ per } \text{conv. unif.} \end{aligned}$$

ORDINE delle scelte

① Mi viene dato $\varepsilon > 0$

② Scelgo $\delta > 0$ t.c. $|f_\infty(x) - f_\infty(x_\infty)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $x \in (x_\infty - \delta, x_\infty + \delta) \cap \dots$

③ Scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $|f_\infty(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \dots \forall n \geq n_0$

$$|x_n - x_\infty| \leq \delta$$

e allora concludo.

Ulteriore esercizio Mostrare che la puntuale non basta e la continuità del limite serve.
— o — o —

Spazi di funzioni Sia (Y, d) metrico, e sia S un insieme non vuoto.

Def. Una funzione $f: S \rightarrow Y$ si dice limitata se

$$\exists y_0 \in Y \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad d(f(x), y_0) \leq M \quad \forall x \in S$$

Poniamo $F_b := \{ \text{funzioni } f: S \rightarrow Y \text{ limitate} \}$

Date due funzioni limitate $f: S \rightarrow Y$ e $g: S \rightarrow Y$ posso definire

$$\text{dist}(f, g) := \sup \{ d(f(x), g(x)) : x \in S \} \in \mathbb{R}$$

È reale perché

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), y_f) + d(y_f, y_g) + d(y_g, g(x))$$

Si verifica facilmente che $(F_b(S, Y), \text{dist})$ è uno spazio metrico.

L'unica non completamente ovvia è la triangolare

$$d(f(x), r(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), r(x))$$

$$\leq \text{dist}(f, g) + \text{dist}(g, r) \quad \forall x \in S$$

Ora faccio il sup al LHS e ottengo $\text{dist}(f, r)$

Fatti generali ① Se f_n e f_∞ stanno in $F_b(S, Y)$, allora

$$f_n \longrightarrow f_\infty \quad \text{uniformemente}$$

se e solo se $\text{dist}(f_n, f_\infty) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

② $(F_b(S, Y), \text{dist})$ è completo $\Leftrightarrow (Y, d)$ è completo

(Esercizio: data $\{f_n\}$ di Cauchy in F_b , ho che $\{f_n(x)\}$ è di Cauchy in (Y) per ogni $x \in S$, quindi $\rightarrow$, poi bisogna mostrare che la limit. è unif.)

③ Se X è metrico compatto, allora $C^0(X, Y)$ sono tutte funzioni limitate, e questo è a sua volta completo rispetto a dist. (perché il limite unif. di funzioni cont. è cont.)

— o — o —