

TEOREMI DI SCAMBIO PER SUCC. DI FUNZIONI

- ① LIMITE f_n continue, $f_n \rightarrow f_\infty \Rightarrow f_\infty$ continua
- ② INTEGRALE $f_n \rightarrow f_\infty \Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f_\infty(x) dx$
- ③ DERIVATA $f_n \rightarrow f_\infty \Rightarrow f_n' \rightarrow f_\infty'$

S insieme, $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\infty: S \rightarrow \mathbb{R}$

Conv. puntuale: $f_n \rightarrow f_\infty$ puntualmente (POINTWISE) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall s \in S \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m_0 \quad |f_n(s) - f_\infty(s)| \leq \varepsilon$$

Conv. unif.: $f_n \rightarrow f_\infty$ uniformemente (UNIFORMLY) se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall s \in S \quad \forall n \geq m_0 \quad |f_n(s) - f_\infty(s)| \leq \varepsilon.$$

② INFORMALE

$$\left| \int_a^b f_\infty(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f_\infty(x)) dx \right|$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f_\infty(x)|}_{\text{per } n \text{ abbastanza grande questo } \leq \varepsilon \text{ per ogni } x \in [a,b]} dx$$

$$\leq \varepsilon (b-a)$$

③ INFORMALE: $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t) dt$ se posso scambiare il limite con l'integrale

$$f_\infty(a) + \int_a^x f_\infty'(t) dt$$

TEOREMA (Teorema di scambio dell'integrale)

Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo.

Sia $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una succ. di funzioni integrabili secondo Riemann (integrale proprio).

Sia $f_\infty : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Supponiamo che

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. su } [a,b]$$

Allora

(1) f_∞ è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$

(2) vale lo scambio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f_\infty(x) dx.$$

Dim. (1) Per dimostrare che $f_\infty(x)$ è integrabile devo trovare due step function $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ tali che

$$\psi(x) \leq f_\infty(x) \leq \varphi(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\text{e } \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx \text{ piccolo a piacere}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Scegliamo $m \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall n \geq n_0$$

Fisso n_0 , sappiamo che $f_{n_0}(x)$ è integrabile, quindi esistono $\varphi_1(x)$ e $\psi_1(x)$ t.c.

$$\psi_1(x) \leq f_{n_0}(x) \leq \varphi_1(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\text{e } \int_a^b (\varphi_1(x) - \psi_1(x)) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Dico che $\varphi(x) := \varphi_1(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$$\psi(x) := \psi_1(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

va bene per $f_\infty(x)$. Infatti

$$\psi(x) \leq f_\infty(x) \leq \varphi(x)$$

Vera perché

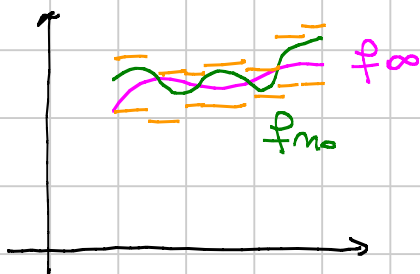
$$f_\infty(x) \leq f_{m_0}(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq \varphi_1(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} = \varphi(x)$$

e idem dal basso.

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_a^b (\varphi(x) - \psi(x)) dx &= \int_a^b (\varphi_1(x) - \psi_1(x)) dx + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Informalmente



Prendo la step. funct.
che va bene per
 $f_{m_0}(x)$ e la alzo e
abbasso di $\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

(2) Segue come nella dimostrazione informale. Detto meglio:
dato $\varepsilon > 0$ scelgo $m_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall n \geq m_0$$

e ottengo che

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f_\infty(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f_\infty(x)| dx \leq \varepsilon \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \end{aligned}$$

Oss. La tesi meno ovvia è che $f_\infty(x)$ è integrabile secondo Riemann.

Oss. Se $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ puntualmente e $f_n(x)$ è integrabile secondo Riemann per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora può succedere che $f_\infty(x)$ non sia nemmeno integrabile secondo Riemann.

Esempio classico: prendo

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Numero $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ e definisco

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

x è uno dei primi n razionali

È evidente che $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ punt. su $\mathbb{R}$ e $f_\infty(x)$ non è integr. sec. Riemann

TEOREMA (Teorema di scambio della derivata)

Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, sia $f_n : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni di classe C^1 .

Supponiamo che

(i) esiste una funzione $g_\infty : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f_n' \rightarrow g_\infty \quad \text{unif. in } [a,b]$$

conv. unif. delle derivate

(ii) esiste $x_0 \in [a,b]$ ed esiste $a_\infty \in \mathbb{R}$ tale che

$$f_n(x_0) \rightarrow a_\infty$$

conv. puntuale in un solo punto dell'intervallo

Allora, posto

$$f_{\infty}(x) := a_{\infty} + \int_{x_0}^x g_{\infty}(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

si ha che

- (1) f_{∞} è di classe C^1
- (2) $f_{\infty}'(x) = g_{\infty}(x)$ per ogni $x \in [a, b]$
- (3) $f_n(x) \rightarrow f_{\infty}(x)$ unif. in $[a, b]$.

Dim. Dal teorema di scambio di limite / continuità (che faremo dopo) segue che g_{∞} è continua in $[a, b]$.

A questo punto segue che $f_{\infty}(x)$ è C^1 per costruzione.

Resta da dim. ③.

Dato $\varepsilon > 0$, scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$|f_n'(x) - g_{\infty}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n \geq n_0$$

$$|f_n(x_0) - a_{\infty}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\text{Osservo che } f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t) dt$$

e faccio la differenza

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_{\infty}(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t) dt - a_{\infty} - \int_{x_0}^x g_{\infty}(t) dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - a_{\infty}| + \left| \int_{x_0}^x (f_n'(t) - g_{\infty}(t)) dt \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \leq |x - x_0| \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\ &\quad \text{per } n \geq n_0 \quad \leq \cancel{(b-a)} \frac{\varepsilon}{2 \cancel{(b-a)}} \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon.$$

— o — o —

Oss. Nelle ipotesi basta

→ convergenza uniforme delle derivate in $[a, b]$

→ convergenza puntuale anche in un solo pto di $[a, b]$

Cosa si salva in dim. maggiore?

→ il teorema di scambio dell'integrale vale allo stesso modo per

$$f_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$$

↑
misurabile

→ il teorema di scambio della derivata vale con le derivate parziali. Ad esempio

$$f_n: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} \rightarrow g_\infty \quad \text{unif. in } [0, 1] \times [0, 1]$$

$$f_n(x_0, y) \rightarrow a_\infty(x_0, y) \quad \text{puntuale } \forall y \in [0, 1]$$

← puntuale di f_n in un segmento verticale

$$\Rightarrow f_\infty(x, y) = a_\infty(x_0, y) + \int_{x_0}^x g_\infty(t, y) dt$$

è il limite uniforme di $f_n(x, y)$

— o — o —

