

SUCCESIONI DI FUNZIONI

Setting: sia S un insieme, e siano $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. (Convergenza puntuale e convergenza uniforme)

Siano $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $f_\infty: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che

- $f_n \rightarrow f_\infty$ **PUNTALMENTE** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in S \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon$$

- $f_n \rightarrow f_\infty$ **UNIFORMEMENTE** se

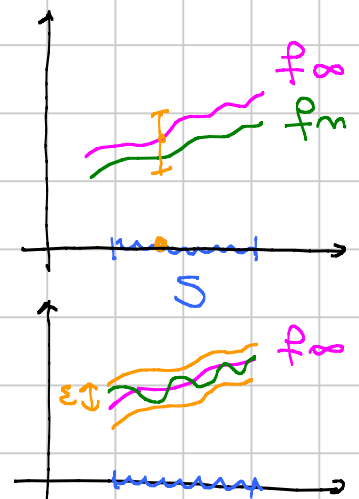
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in S \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f_\infty(x)| \leq \varepsilon$$

Oss. La convergenza puntuale vuol dire: per ogni $x \in S$ fissato considero $\{f_n(x)\}$: questa è una succ. di numeri a cui chiedo di convergere a $f_\infty(x)$, quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) \quad \forall x \in S$$

Nella convergenza uniforme avviene la stessa cosa, ma n_0 dipende solo da ε e non anche da x .

Graficamente questo vuol dire che il grafico di f_n sta in una striscia ampia ε intorno al grafico di f_∞ per $n \geq n_0$



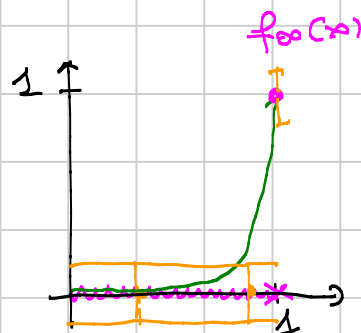
Ovvieta: conv. unif. $\Rightarrow$ conv. puntuale
MA non vale il viceversa

Esempio (L'ESEMPIO) $S = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$

Studiamo la conv. puntuale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

La convergenza NON è uniforme in $[0, 1]$
perché $f_n(x)$ non casca in un "intorno"
di ampiezza $\varepsilon = \frac{1}{10}$ intorno ad
 $f_\infty(x)$.



Oss. $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$ uniformemente
in $[0, \frac{9}{10}]$

Più in generale: $f_n(x) \rightarrow f_\infty(x)$
unif. in $[0, A]$ per ogni $A < 1$,
ma

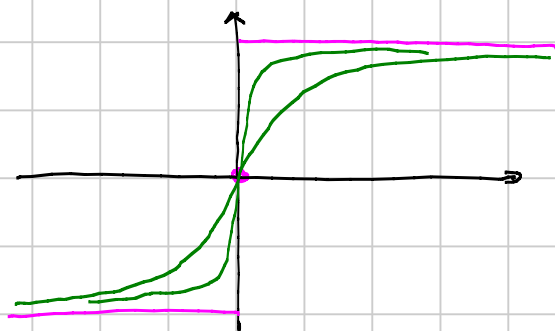
$f_n(x)$ NON conv. unif. a $f_\infty(x)$ in $[0, 1]$



Esempio 2 $f_n(x) = \arctan(nx)$ $S = \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Il limite non è unif. in $\mathbb{R}$, ma
è unif. ad esempio in $[A, +\infty)$
oppure $(-\infty, -A]$ per ogni $A > 0$
Non è unif. in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

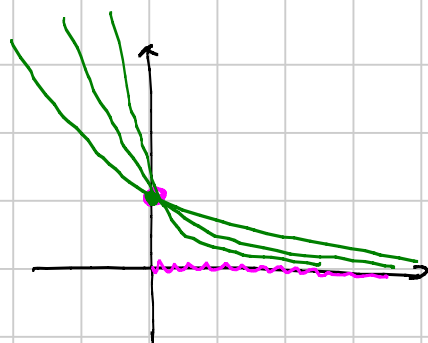


Esempio 3 $f_n(x) = e^{-n x}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ +\infty & \text{se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{conv. puntuale per } x \geq 0$$

Non c'è conv. unif. in $[0, +\infty)$ e nemmeno in $(0, +\infty)$.

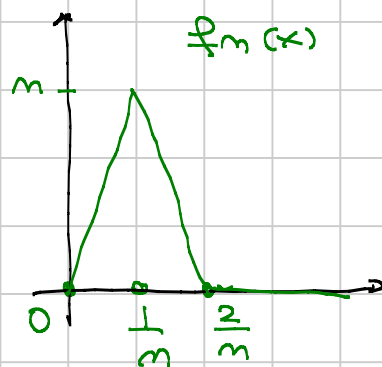
Invece c'è conv. unif. in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$.



Esempio 4 È evidente che il limite puntuale di funzioni continue può non essere continuo.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = 0 \quad \forall x \geq 0$$

↑
se $x=0$ è sempre $f_n(x)=0$
se $x>0$ è $f_n(x)=0$ definitivamente.



La conv. è unif. in $[A, +\infty)$ per ogni $A > 0$,
ma non è unif. in $[0, +\infty)$ e nemmeno in $(0, +\infty)$.

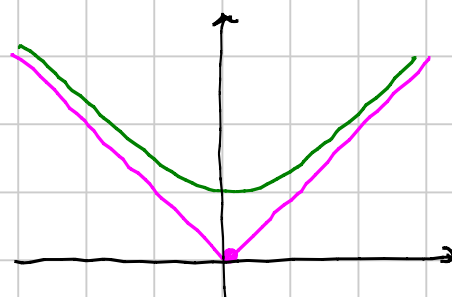
Nota bene

$$\int_0^{10} f_n(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\int_0^{10} f_\infty(x) dx = 0$$

Non è vero che l'integrale del limite è il limite degli integrali se c'è conv. puntuale.

Esempio 5 $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = |x|$$



C'è conv. puntuale su tutto $\mathbb{R}$ e c'è pure conv. unif.
 Per dim. formalmente si fa la differenza

$$|f_n(x) - f_\infty(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right|$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}$$

$x=0 \rightarrow$

$$\leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Dato ε , la diff. diventa $\leq \varepsilon$ da un certo n_0 in poi
INDIPENDENTE da x , quindi c'è conv. unif.

Brutta notizia 3: il limite unif. di funzioni C^1 può
 non essere C^1 .

Il giorno in cui avrò $f_n: S \rightarrow Y$, allora

- posso definire la conv. puntuale se in arrivo ho una
 nozione di convergenza in Y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f_n(x)}_{\text{el. di } Y} \quad \forall x \in S$$

- posso definire la conv. unif. se in Y c'è una metrica d.
 dico che

$$f_n \rightarrow f_\infty \quad \text{unif}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall x \in S \forall n \geq m_0 d(f_n(x), f_\infty(x)) \leq \varepsilon$$

Ancora meglio, posso definire

$$\text{dist}(f, g) := \sup \{ d(f(x), g(x)) : x \in S \}$$

(ampiezza di una striscia intorno ad f che contiene g)

e allora

$$f_n \rightarrow f_\infty \text{ unif. in } S \iff \text{dist}(f_n, f_\infty) \rightarrow 0$$

Oss. dist vorrebbe essere una distanza nell'insieme delle funzioni $f: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Le proprietà (d1), ..., (d4) sono verificate, MA non è detto che sia ben definita (il sup potrebbe essere $+\infty$).