

Postilla sui mult. di Lagrange

$f(x)$ ~ funzione da fare max/min su V

$g_1(x) = \dots = g_k(x)$ ~ vincoli che def. V

Le condizioni in un p.to x_0 di max/min locale si possono riscrivere come

(1) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ b.c. x_0 è p.to stazionario per

$$\lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_k g_k(x)$$

(2) $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ b.c. x_0 è p.to stazionario per

$$f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$

Volendo (2) si può anche riscrivere dicendo

(2') $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k$ b.c. $(x_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ è p.to stazionario per

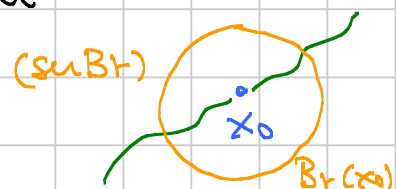
$$\underbrace{\Phi(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}_{n+k \text{ variabili}} := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$

(l'annullarsi delle $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ sono le eq. del vincolo)

Lemma (Cond. suff. affinché x_0 sia p.to di min. loc. su V)

Supponiamo che x_0 verifichi la cond. nec. (2). Supponiamo in aggiunta che x_0 sia p.to di min. locale per

$$F(x) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$



Allora x_0 è p.to di min. per $f(x)$ su V .

Dim. Per ogni $x \in B_r(x_0) \cap V$ vale la relazione $F(x) \geq F(x_0)$ dunque

$$f(x) - \lambda_1 \underline{g_1(x)} - \dots - \lambda_k \underline{g_k(x)} \geq f(x_0) - \lambda_1 \underline{g_1(x_0)} - \dots - \lambda_k \underline{g_k(x_0)}$$

Essendo su V tutti i termini con le g se ne vanno, quindi $f(x) \geq f(x_0)$.

— o — o —

Esempio 1 Consideriamo l'insieme V di eq.

$$\begin{cases} g_1: x + y + zx^2 + \arctan z = 0 \\ g_2: \sin x - y^2 = 0 \end{cases} \quad (0,0,0) \in V$$

$\exists r > 0$ t.c. $V \cap B_r(0,0,0)$ è una curva
Trovare il vettore tangente alla curva.

$$Jg(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

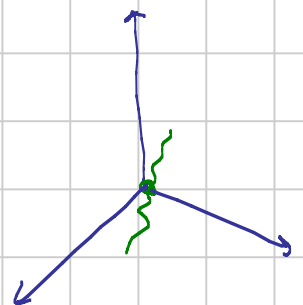
Non posso (almeno immediata-
mente) ricavare y e z in funzio-
ne di x

Posso ricavare x e y in funzione di z : $x(z), y(z)$.

Teo. funz. implicita $\Rightarrow$ in un intorno di $(0,0,0)$ l'insieme V si scrive come

$$V = \{ (x(z), y(z), z) : z \in (-\delta, \delta) \}$$
$$(x(t), y(t), t) : t \in (-\delta, \delta)$$

"Il vettore tangente sarà $(x'(0), y'(0), 1)$



Le derivate le posso calcolare con la formula generale

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = -[J_{x,y} g(0,0,0)]^{-1} [J_z g(0,0,0)]$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e si fa il conto.}$$

In alternativa posso calcolare i polinomi di Taylor di $x(z)$ e $y(z)$ fino all'ordine che voglio.

Ad esempio all'ordine 1:

$$x(z) = az + o(z)$$

$$y(z) = bz + o(z)$$

Sostituisco nelle eq.:

$$\begin{aligned} az + bz + a \tan z + o(z) &= 0 \\ \sin(az) + o(z) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (a+b+1)z + o(z) = 0 \\ az + o(z) = 0 \end{cases} \Rightarrow a=0, b=-1$$

La retta tangente a V nell'origine è

$$\boxed{(0,0,0) + t(0,-1,1)}$$

$$\text{Calcoliamo } \nabla g_1(0,0,0) = (1,1,1)$$

$$\nabla g_2(0,0,0) = (1,0,0)$$

$g_1(x,y,z) = 0$ è una sup. vicino a $(0,0,0)$ che ha come piano tangente quello $\perp$ a $\nabla g_1(0,0,0)$ cioè
 $x+y+z=0$

$g_2(x,y,z) = 0$ è una sup. piana con piano tangente $x=0$

La retta tangente a V è l'intersezione dei 2 piani tang.

Oss. Volendo rappresentare la sup. $g_2(x,y,z)=0$ come grafico possiamo solo farlo nella forma

$$x = \varphi(y,z)$$

(l' unica deriv. part. di $g_2 \neq 0$ in $(0,0,0)$ è ∂_x)
— 0 — 0 —

Esempio 2 $f(x,y,z) = (x^2 - y^2, y^2 + z^3, z^3 + x^4)$

$f(1,1,1) = (0, 2, 2)$. Vediamo se $(0, 2, 2) \in \text{Int}(\text{Im } f)$

Strategia: calcolo $Jf(1,1,1)$. Se ha rank = 3, allora $f(1,1,1)$ è interno all' immagine
↑
uguale a dim. spazio di arrivo

Se fosse $f(x,y,z) := (x^2 - y^2, y^2 + z^3)$ basterebbe rango 2.

Esempio 3 $\underbrace{y^2 + y^4 + x \arctan x + x^6}_{f(x,y)} = 1 + \frac{\pi}{4}$

Definisce un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Come è fatto?

- Non vuoto e limitato : $f(1,0) = 1 + \frac{\pi}{4}$ e $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$

$\Rightarrow$ compatto

- Simmetrico rispetto asse x e asse y : se faccio

$$(x,y) \rightsquigarrow (x,-y) \quad \text{non cambia nulla}$$

$$(x,y) \rightsquigarrow (-x,y) \quad \text{" " "}$$

Quindi basta capire come è fatto nel 1° quadrante

- Per ogni $x \in [0,1]$ esiste unico y t.c. $(x,y) \in$ insieme
" " $x > 1$ non esiste nessun y t.c. $(x,y) \in$ insieme

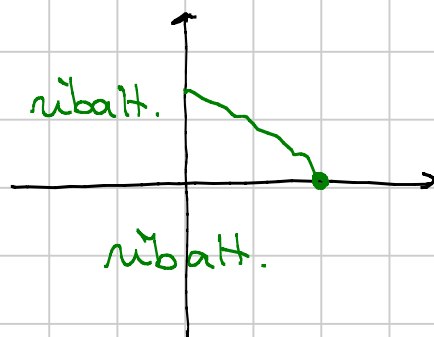
Basta osservare che, fissato x ,
la funzione

$$y \mapsto y^2 + y^4 + \dots$$

è strett. monotona per $y \geq 0$ e $\rightarrow +\infty$ per $y \rightarrow +\infty$,
quindi basta vedere quando

$$f(x, 0) \leq 0$$

il che accade $\Leftrightarrow x \in [0, 1]$



• È regolare? Sì è C^∞

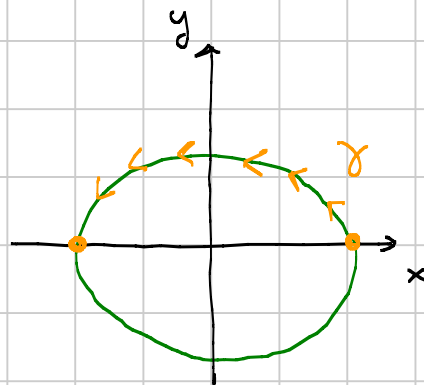
Basta dimostrare che $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$ in tutti i p.ti
dell'insieme. Qui

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

• Sia γ la parte alta e sia

$$\omega = y e^{xy} dx + x e^{xy} dy$$

$$\int_{\gamma} \omega = ?$$



La forma è esatta 😊, quindi basta fare una primitiva
e fare la diff. tra i valori agli estremi (che conosco).

• ruotare γ intorno all'asse y , ottenere una sup. S ,
e calcolare il flusso attraverso S (orientata in qualche
modo) di un campo $\vec{E}$ a div nulla

Essendo a div. nulla $\vec{E}$ è un rotore, quindi posso cambiare
la sup. a parità di bordo, quindi posso fare il flusso su
un cerchio

