

Dim per penalizzazione $m=2$ e $k=1$

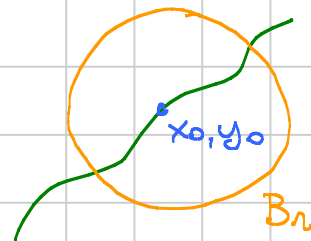
$f(x,y)$ da fare max/min

$g(x,y)=0$ vincolo V

(x_0, y_0) p.to di max/min locale su V

Wlog supponiamo che (x_0, y_0) sia p.to di min e sia $r > 0$ t.c. il minimo è in

$$\overline{B}_r((x_0, y_0))$$



Step 1 Possiamo supporre che (x_0, y_0) sia p.to di min. STRETTO, cioè

$$f(x,y) > f(x_0, y_0)$$

per ogni $(x,y) \in V \cap B_r$ con $(x,y) \neq (x_0, y_0)$

Se non lo è, basta considerare

$$\hat{f}(x,y) = f(x,y) + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

Questa ha min. stretto in (x_0, y_0) e $\nabla \hat{f}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)$

Step 2 Considero $f_m(x,y) := f(x,y) + m g^2(x,y)$

↑
penalizzazione

Ora f_m è continua, $\overline{B}_r$ è compatto, quindi per ogni $m \in \mathbb{N}$ avremo che f_m ammette minimo in qualche punto $(x_m, y_m) \in \overline{B}_r$

Idea: $(x_m, y_m) \rightarrow (x_0, y_0)$. D'altra parte

$$0 = \nabla f_m(x_m, y_m) = \nabla f(x_m, y_m) + 2m g(x_m, y_m) \nabla g(x_m, y_m)$$

Quindi $\nabla f(x_n, y_n)$ e $\nabla g(x_n, y_n)$ sono lin. dip.
 Passando al limite ed usando il lemma otteniamo che

$$\nabla f(x_0, y_0) \text{ e } \nabla g(x_0, y_0)$$

sono lin. dip. $\nearrow \nabla g(x_0, y_0) = 0$
 $\searrow \exists \lambda \text{ t.c. } \nabla f = \lambda \nabla g$

Step 3 Mostriamo che $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$.
 Intanto osserviamo che

$$f_n(x_n, y_n) \leq f_n(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) \quad (*)$$

$\uparrow$ è min. $\uparrow$ def.

A meno di s.succ., che non riusciamo, $(x_n, y_n) \rightarrow (x_\infty, y_\infty)$
 per compattezza.

$\rightarrow$ Dico che $(x_\infty, y_\infty) \in V$. Se così non fosse $g(x_\infty, y_\infty) \neq 0$,
 ma allora

$$f_n(x_n, y_n) = f(x_n, y_n) + n g^2(x_n, y_n) \rightarrow +\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\uparrow$
 $f(x_\infty, y_\infty)$ $+\infty$ > 0 impossibile per (*)

$\rightarrow$ Dico che $(x_\infty, y_\infty) = (x_0, y_0)$. Se così non fosse

$$f_n(x_n, y_n) \geq f(x_n, y_n)$$

$\downarrow$
 $f(x_\infty, y_\infty)$

Quindi

$$\liminf f_n(x_n, y_n) \geq f(x_\infty, y_\infty) > f(x_0, y_0)$$

perché il minimo
 è stretto
 $\downarrow$

il che contraddice (*)

Step 4 Poiché $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, definitivamente

$(x_n, y_n) \in B_r((x_0, y_0))$ aperta

cioè (x_n, y_n) è p.to di min. interno, quindi $\nabla f_n(x_n, y_n) = 0$
e si conclude come nell'idea iniziale.

— o — o —

Cosa cambia nel caso generale? Poco o nulla.

Si pone

$$f_n(x) := f(x) + n g_1^2(x) + \dots + n g_k^2(x)$$

$$f(x) + n g_1^2(x) + n^2 g_2^2(x) + \dots$$

A n fisso c'è un p.to di minimo x_n , che definitivamente è interno e

$$0 = \nabla f_n(x_n) = \nabla f(x_n) + 2n g_1(x_n) \nabla g_1(x_n) + \dots + \dots \nabla g_k(x_n)$$

Ad n fisso $\{\nabla f(x_n), \nabla g_1(x_n), \dots, \nabla g_k(x_n)\}$ sono lin. dip.

quindi per il lemma al limite la matrice

$$\nabla f(x_0), \nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$$

ha rango $\leq k$. Da qui solita conclusione

→ o gli ultimi k hanno rango $\leq k-1 \rightsquigarrow$ caso (1)

→ " " " " " " k , quindi il primo è
loro comb. lin. $\rightsquigarrow$ caso (2).

— o — o —

Esercizio

$$f(x,y) = (x+y, x^2+y^2)$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Domande: → dove è loc. invertibile?

→ iniettiva?

→ surgettiva? Immagine?

Locale invertibilità

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

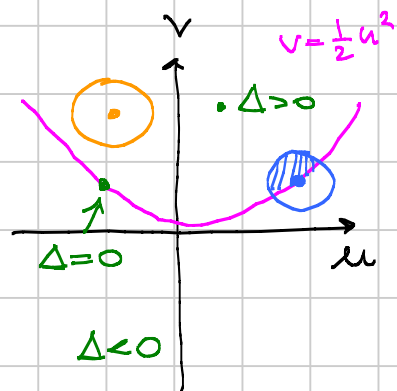
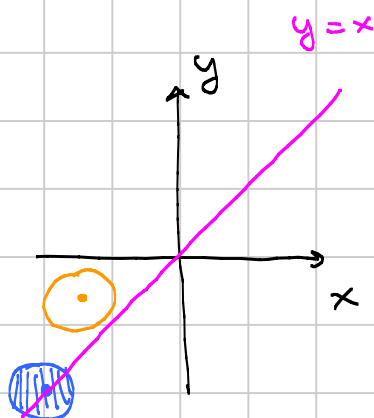
$$\text{Det: } 2(y-x)$$

Invertibile nei pti con $x \neq y$.

Per pensarla scrivo

$$u = x+y$$

$$v = x^2+y^2$$



L'immagine di $y=x$ è $(t,t) \rightarrow (2t, 2t^2)$
 $v = \frac{1}{2}u^2$

Surgettività. Certamente i pti con $v < 0$ non stanno nell'imm.

$$x+y \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2+y^2} \rightsquigarrow (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \rightsquigarrow v \geq \frac{1}{2}u^2$$
$$u^2 \leq 2v$$

quindi i pti sotto la parabola $\notin$ Imm.

Idea. Tutti i pti sopra la parabola $\in$ Imm. no risolvo il sist

$$\begin{cases} x+y = u \\ x^2+y^2 = v \end{cases} \quad y = u-x \rightsquigarrow 2x^2 + u^2 - 2ux = v$$
$$\rightsquigarrow 2x^2 - 2ux + (u^2 - v)$$

$$x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2u^2 + 2v}}{2} = \frac{u \pm \sqrt{2v - u^2}}{2}$$

$$y := u - x$$

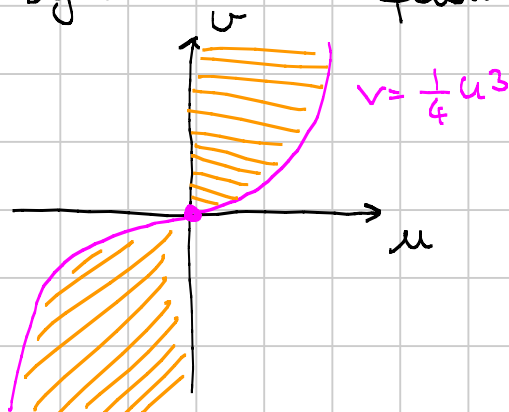
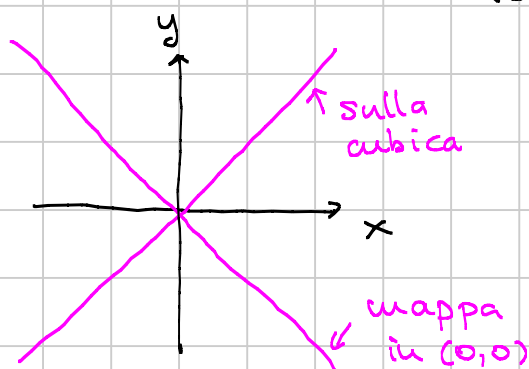
Si vede abbastanza facilmente che per ogni (u,v) sopra esistono 2 soluzioni, una con $y > x$, una con $y < x$

Inoltre f ristretta a ciascuno dei 2 semipiani a valori sopra la parabola è glob. invertibile.

Esempio 2 $f(x,y) = (x+y, x^3+y^3)$

Locale invertibilità: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x^2 & 3y^2 \end{pmatrix} = Jf$

$\text{Det} = 3(y^2 - x^2) \neq 0$
fuori dalle bisettrici



$$y = x \rightsquigarrow (2t, 2t^3) \rightsquigarrow v = \frac{1}{4} u^3$$

$$y = -x \rightsquigarrow (0,0) \rightsquigarrow \text{ADDIO INIETTIVITÀ}$$

$$\begin{aligned} x+y &= u \\ x^3+y^3 &= v \end{aligned} \rightsquigarrow y = u-x \rightsquigarrow \cancel{x^3} + u^3 - 3u^2x + 3ux^2 - \cancel{x^3} = v$$

$$\rightsquigarrow 3ux^2 - 3u^2x + (u^3 - v) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3u^2 \pm \sqrt{9u^4 - 12u^4 + 12uv}}{6u} = \frac{3u^2 \pm \sqrt{12uv - 3u^4}}{6u}$$

I pti (u,v) nell'immagine devono avere $4uv - u^4 \geq 0$
 $u(v - \frac{1}{4}u^3) \geq 0$

I pti con $u=0$ e $v \neq 0$ non stanno nell'immagine.

L'idea è che ciascuno dei 4 "triangoli" mappi 1-1
con una delle 2 componenti arancioni (segue dalle formule)

— o — o —

Esempio 3 $u = x^2 + \sin(xy) - y$
 $v = y^4 - \arctan(xy^2) + x$

→ localmente invertibile in un intorno dell'origine

$$Jf = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ surgettiva? Sembra!

$$u+v = \underbrace{x^2 + y^4}_{g(x,y)} + \text{robucola}$$

$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} g(x,y) = +\infty$, quindi per W. gen g ha minimo

→ $u+v$ non può assumere valori sotto il minimo.