

Dim. Mult. Lagrange

- ① Esplicitare il vincolo
- ② Usare mappa aperta con ϕ ausiliaria
- ③ Metodo di penalizzazione

Dim. con strategia ① nel caso generico $k < n$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzione da minimizzare

$g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ sono le equazioni del vincolo V

$z_0 \in V$ è un pto di min / max locale per f su V

f e g sono di classe C^1 e $Jg(z_0)$ ha rango k

Voglio dir che ∇f è comb. lin. di $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$.

Separo le variabili in 2 gruppi

$$f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$$

$$z_0 = (x_0, y_0)$$

e analogamente

$$g_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$$

Suppongo wlog che

$J_y g(x_0, y_0)$ sia invertibile

Per il teorema della funzione implicita posso ricavare y in funzione di x , cioè trovare δ tale che

$$g(x, \delta(x)) = 0$$

k -equazioni

$\forall x$ vicino ad x_0

Inoltre

$$J\delta(x_0) = - \underbrace{[J_y g(x_0, y_0)]^{-1} J_x g(x_0, y_0)}_{\text{dimensioni compatibili}}$$

Come nel caso $k=1$, poniamo

$$F(x) := f(x, \delta(x)) \quad \text{definita vicino ad } x_0$$

La funzione F ha max/min in x_0 per h_p , quindi le sue derivate parziali si annullano. Quindi per ogni $i=1, \dots, m$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_j}(x_0, y_0) \frac{\partial \delta_j}{\partial x_i}(x_0) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{chain rule} \\ &= \langle \nabla f(x_0, y_0), w_i \rangle \end{aligned}$$

dove $w_i = (\overbrace{0 \dots 0 1 0 \dots 0}^m \frac{\partial \delta_1}{\partial x_i}(x_0) \dots \frac{\partial \delta_k}{\partial x_i}(x_0))$
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad i$

Poniamo $W := \text{Span}(w_1, \dots, w_m) \rightarrow$ ha $\dim(W) = m$ perché
messi uno sull'altro viene
Id_m a sx
Abbiamo appena dim. che

$$\nabla f(x_0, y_0) \in W^\perp \leftarrow \text{ha dimensione } n-m=k$$

Se per caso $W^\perp$ fosse generato da $\nabla g_1(x_0, y_0), \dots, \nabla g_k(x_0, y_0)$ avremmo finito.

Ora

- sono esattamente k vettori
- sono lin. indep. per l'ipotesi di rango k
- resta da dimostrare che stanno in $W^\perp$, cioè che

$$\langle \nabla g_a(x_0, y_0), w_i \rangle = 0 \quad \forall a=1, \dots, k \quad \forall i=1, \dots, m$$

Uso che $g_a(x, \delta(x)) = 0$, quindi pongo $G_a(x) = g_a(x, \delta(x))$
e impongo $\frac{\partial G_a}{\partial x_i}(x_0) = 0$

$$0 = \frac{\partial G_a}{\partial x_i}(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chain} \\ \text{rule}}}{=} \frac{\partial g_a}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial g_a}{\partial y_j}(x_0, y_0) \frac{\partial \delta_j}{\partial x_i}(x_0)$$

$$= \underbrace{\nabla g_a(x_0, y_0)}_0, \underbrace{w_i}_0$$

Riscrivo le stesse cose più brevemente. Come sopra considero

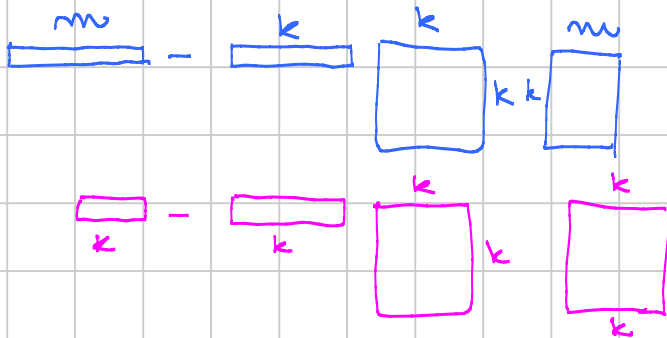
$$F(x) := f(x, \delta(x))$$

$$0 = \nabla F(x_0) = J_x f(x_0, y_0) + J_y f(x_0, y_0) J \delta(x_0)$$

$$= \nabla_x f(x_0, y_0) + \nabla_y f(x_0, y_0) J \delta(x_0)$$

$$0 = \nabla_x f(x_0, y_0) - \nabla_y f(x_0, y_0) [J_y g(x_0, y_0)]^{-1} [J_x g(x_0, y_0)]$$

$$0 = \nabla_y f(x_0, y_0) - \nabla_y f(x_0, y_0) [J_y g(x_0, y_0)]^{-1} [J_y g(x_0, y_0)]$$



Usando vettori e matrici ottengo

$$0 = \nabla f(x_0, y_0) - \underbrace{\nabla_y f(x_0, y_0) [J_y g(x_0, y_0)]^{-1}}_{\substack{\text{vettore riga lungo } k \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k)}} J_g(x_0, y_0)$$

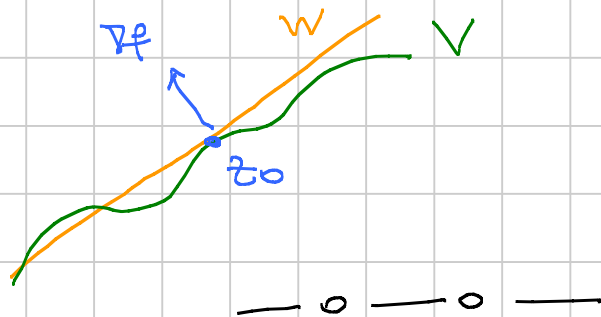
$$\lambda_1 \cdot 1^{\text{a}} \text{ riga} + \dots + \lambda_k \cdot k\text{-esima riga}$$

$$= \lambda_1 \nabla g_1(x_0, y_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0, y_0)$$

Osservazione Chi è il w introdotto nella dim.?

È lo Span di $w_1, \dots, w_m$, cioè l'immagine del differenziale, cioè la giacitura dello spazio tangente al vincolo V in z_0 .

Intuitivamente già sapevamo che ∇f nei p.ti di max/min è ortogonale al vincolo.



Dim. con il metodo ③

Lemma Sia $\{A_k\}$ una successione di matrici $m \times n$

Supponiamo che

(i) per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $\text{rank}(A_k) \leq J \leftarrow$ fisso, indip. da k

(ii) $A_k \rightarrow A_\infty$ (convergenza el. per elemento)

Allora

$$\text{rank}(A_\infty) \leq J.$$

$(J+1) \times (J+1)$ di A_k

Dim. Per ipotesi sappiamo che tutti i $\overset{(J+1) \times (J+1)}{\text{minori}}$ hanno determinante uguale a 0.

Il Det è una funzione continua degli elementi.

Quindi gli stessi det. di A_∞ si annullano, quindi il rango di A_∞ è $\leq J$.

Corollario (stessa cosa detta diversamente) Il rango è Sci (semicont. sup.), cioè

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \text{rank}(A_k) \geq \text{rank}(A_\infty)$$

Oss. Il rango può crollare al limite $\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

Corollario Siano $\{v_m\}$ e $\{w_m\}$ due succ. di vettori in $\mathbb{R}^{27}$.

Supponiamo che

(i) $\{v_m\}$ e $\{w_m\}$ sono lin. dip. per ogni $m \in \mathbb{N}$

(ii) $v_m \rightarrow v_\infty$ e $w_m \rightarrow w_\infty$

Allora

v_∞ e w_∞ sono lin. dip.

Tentazione:

$$a_m v_m + b_m w_m = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_\infty v_\infty & & b_\infty w_\infty \end{matrix}$$

$\nearrow$
non le so $\nearrow$

Dim. Applico il lemma con $A_m = (v_m | w_m)$. $\text{Rango } A_m \leq 1$
 $\Rightarrow \text{Rango } A_\infty \leq 1.$

— o — o —

□