

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, sia $V \subseteq \Omega$ un sottoinsieme, sia $z_0 \in V$.

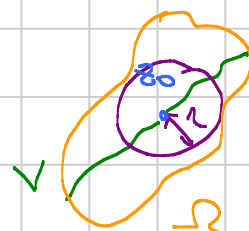
Si dice che z_0 è p.to di min. locale per f ristretta a V se esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(z_0) \subseteq \Omega$$

e

$$f(z) \geq f(z_0) \quad \forall z \in V \cap B_r(z_0)$$

Analogamente si definiscono i p.to di max locale.



Teorema (Moltiplicatori di Lagrange)

Siano Ω, f, V, z_0 come sopra.

Supponiamo che z_0 sia p.to di max/min locale per f in V .

Supponiamo che

(i) f sia C^1 in Ω

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$$

(ii) esista k funzioni $g_1, \dots, g_k: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che

$$V = \{z \in \Omega : g_1(z) = \dots = g_k(z) = 0\}$$

Allora vale almeno una delle seguenti due opzioni

(1) $\text{rank}(Jg(z_0)) < k$ (g non è FULL RANK)

(2) esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che

$$\nabla f(z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(z_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(z_0)$$

(cioè $\nabla f(z_0) \in \text{Im}(Jg(z_0))$ pensato come appl. lin.)

Casi : $n=2, k=1$

$n = \text{qualunque}, k=1$

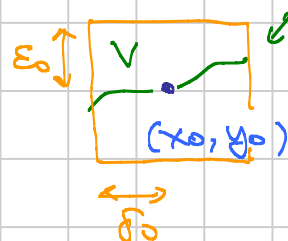
$n = \text{qualunque}, k = \text{qualunque}.$

Dim $n=2, k=1$ $f(x,y)$ funzione da minimizzare
 $g(x,y) = 0$ eq. di V
 $z_0 = (x_0, y_0)$

Se siamo in (1), allora $\nabla g(x_0, y_0) = (0,0)$ e non c'è nulla da dire.

Altrimenti $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$ e supponiamo wlog che $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Teo. funt. implicite $\Rightarrow$ vicino a (x_0, y_0)
posso scrivere



$$V = \{ (x, \delta(x)) : x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \}$$

Considero la funzione $F(x) := f(x, \delta(x))$

$$F : [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \rightarrow \mathbb{R}$$

Per ipotesi F ha pto di max / min in x_0 , quindi

$$0 = F'(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \delta'(x_0)$$

$\uparrow$
chain rule

So che (fun. funt. impl.) $\delta'(x_0) = - \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)}$

Sostituendo trovo

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{f_y(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} g_x(x_0, y_0)$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lambda \quad g_y(x_0, y_0)$$

$\quad \quad \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$

$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$
Quindi siamo
nel caso (2).

Dim 2 del caso $m=2, k=1$

Considero la funzione $\Phi(x,y) := (\underbrace{f(x,y) - f(x_0,y_0)}_{\text{"u"}}, \underbrace{g(x,y)}_{\text{"v"}})$

$$\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$J\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0, y_0) \\ \nabla g(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Se siamo nei casi (1) e (2), allora $\text{rank } J\Phi(x_0, y_0) \leq 1$.

Se per assurdo non siamo in quei casi, allora

$J\Phi(x_0, y_0)$ è invertibile

Ma allora l'immagine di Φ contiene un intorno dell'immagine di (x_0, y_0) , cioè un intorno di $(0,0)$

Supponiamo che (x_0, y_0) sia p.to di min. loc.

Allora i p.ti del tipo $(-\frac{1}{n}, 0)$ non possono stare nell'immagine!

Prendiamo l'inversa ψ di Φ e poniamo

$$(x_n, y_n) := \psi(-\frac{1}{n}, 0)$$

Sono ben definiti per n grande perché cascano in un intorno di $(0,0)$.

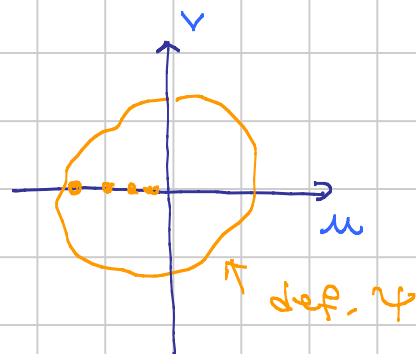
Ora $(x_n, y_n) \in V$ perché $g(x_n, y_n) = 0$

$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$ per continuità dell'inversa

$$f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0) = -\frac{1}{n}$$

$$\leadsto f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0) - \frac{1}{n}$$

quindi (x_0, y_0) non è p.to di min. locale.



Dim. con n generico e $k \geq 1$

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$$

$$g(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_x, y) = 0$$

$$z_0 = (x_0, y_0)$$

$\uparrow$
 $n-1$ variabili

Se non siamo nel caso (1), allora $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, quindi
wlog $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Ma allora per il teo. funz. implicite posso ricavare

$$y = \delta(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, \delta(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

e impongo che ∇F si annulli in x_0

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \underbrace{\frac{\partial \delta}{\partial x_i}(x_0, y_0)}_{\text{segue dal teo. funz. impl.}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) = \boxed{\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)}} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0, y_0) \quad i=1, \dots, n-1$$

λ indipendente da i

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Questo mostra come prima che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$

— 0 — 0 —

Dim 2 dello stesso caso Considero

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, y) := (f(x, y) - f(x_0, y_0), g(x, y))$$

Se non siamo in (1) o (2), allora $J\Phi(x_0, y_0)$ ha rango 2, quindi l'immagine di ogni intorno di (x_0, y_0) contiene un intorno dell'origine, il che non è buono.

— o — o —

Dim 1 del caso generale

$$m := n - k$$

$$f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$$

$$z_0 = (x_0, y_0)$$

$$g_1(\dots) = 0$$

k equazioni del
vincolo

$$\vdots$$

$$g_k(\dots) = 0$$

m var. k variabili

Considero $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$

$$\Phi(x, y) = (f(x, y) - f(x_0, y_0), \underbrace{g(x, y)}_{k \text{ componenti}})$$

$$J\Phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0, y_0) \\ \nabla g_1(x_0, y_0) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Sia nel caso (1), sia nel caso (2) il rank è $\leq k$.

Se per assurdo non fossimo in questi casi, avremmo rank $= k+1$, cioè FULL RANK, ma allora $\text{Im } \Phi$ contiene un intorno di $(0, 0)$. Questo vale per l'immagine di Φ ristretta ad ogni intorno di (x_0, y_0) , in particolare l'intorno in cui $(x_0, y_0) = z_0$ risulta pto di min / max ristretto a V .

L'assurdo segue come prima considerando i pti $(-\frac{1}{n}, 0, \dots, 0)$
 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ proviene da V