

TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA (Teo. invertibilità locale)

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Supponiamo che

(i) f è di classe C^1 in Ω

(ii) $Jf(x_0)$ è invertibile in un certo pto $x_0 \in \Omega$.

Sia $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^m$.

Allora esistono un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 e un intorno $\mathcal{V}$ di y_0 , ed esiste

$$g: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$$

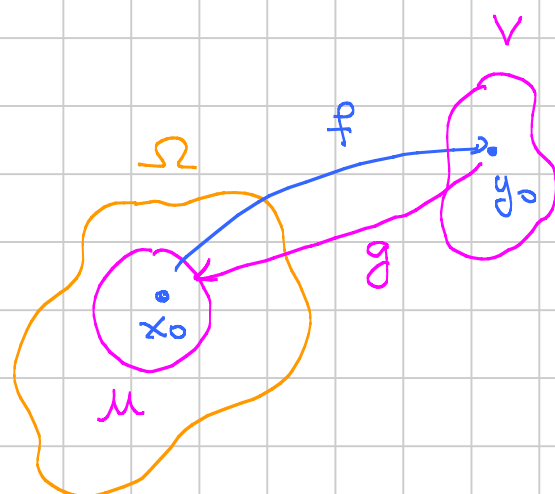
tale che

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x & \forall x \in \mathcal{U} \\ f(g(y)) &= y & \forall y \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

si posso assumere aperti

Inoltre g è di classe C^1 in $\mathcal{V}$ e

$$Jg(y) = [Jf(g(y))]^{-1}$$



Dim. Immediata dato il teo. della funzione implicita.
Considero la funzione di $(2m)$ -variabili

$$\Phi(x, y) = y - f(x)$$

$$\Phi: \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Considero $\Phi(x, y) = 0$ (sistema di m -equazioni in $2m$ -variabili)
e voglio esplicitare x in funzione di y .
Per questo serve la continuità di $\Phi(x, y)$ e l'invertibilità di

$J_x \Phi(x, y)$, cioè lo jacobiano risp. alla variabile x .

Ma

$$J\Phi(x, y) = \begin{array}{|c|c|} \hline \overset{m}{-Jf} & \overset{n}{Id} \\ \hline \end{array} \quad \overset{m}{n}$$

per h_p è invertibile
in x_0 e per continuità
in un intorno

Teo funz. implicite $\Rightarrow$ esistono $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ ed esiste

$$g: B_\varepsilon(y_0) \rightarrow B_\delta(x_0)$$

tale che $\Phi(g(y), y) = 0$, cioè $y - f(g(y)) = 0$, cioè

$$f(g(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in \underbrace{B_\varepsilon(y_0)}_{V}$$

Occhio: l'intorno U di x_0 cercato è $g(V)$, che potrebbe essere strettamente contenuto in $B_\delta(x_0)$.

La regolarità di g segue dal teo. delle funzioni implicite, così come la formula per lo jacobiano di g

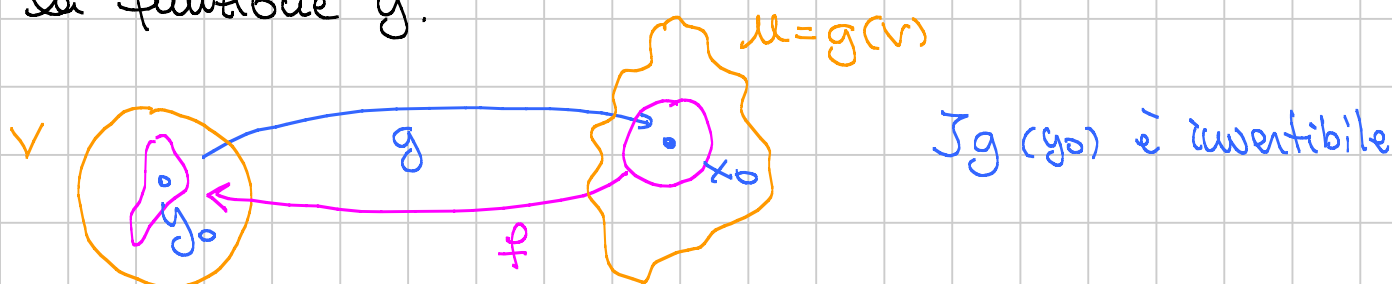
$$Jg(y) : \underbrace{+ [J_x \Phi(x, y)]^{-1}}_{+ Jf(g(y))} \underbrace{[J_y \Phi(x, y)]}_{Id}$$

Oss. $g: \underbrace{B_\varepsilon(y_0)}_V \rightarrow B_\delta(x_0)$ è iniettiva. Posto $U = g(V)$

è automatico che $g: V \rightarrow U$ è invertibile.

Punto importante Bisogna dimostrare che U e V sono aperti, o per lo meno che $x_0 \in \text{Int}(U)$ e $y_0 \in \text{Int}(V)$ ovvio per costruzione

Per dimostrare che U è aperto devo ripetere il ragionamento con la funzione g .



COROLLARIO (Teorema della mappa aperta)

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$ e $y_0 = f(x_0)$

Supponiamo che

(i) f è C^1 su Ω

(ii) $Jf(x_0)$ è invertibile

Allora $y_0 \in \text{Int}(f(\Omega))$

Achtung!

- Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è C^1 e $f'(x) \geq \delta$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile globalmente
- Se f è come sopra e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(\mathbb{R}) = V \subseteq \mathbb{R}$ aperto e $f: \mathbb{R} \rightarrow V$ è invertibile

In più variabili tutto questo non vale può succedere che

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 con $Jf(x)$ invertibile per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, ma f non è iniettiva.

Esempio $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ ↙ banalmente non iniettiva
 $f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$
 $Jf(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$ $\det Jf(x, y) = e^{2x} \neq 0$

L'esempio può essere pensato su $\mathbb{C}$ invece che $\mathbb{R}^2$: $z \rightarrow e^z$

$$z = x + iy \quad e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

—o—o—o—

Generalizzazione te. mappa aperta

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $k \leq n$,
 $x_0 \in \Omega$ e $y_0 = f(x_0)$.

Supponiamo che

(i) f è C^1 in Ω

(ii) $Jf(x_0)$ ha rango k (FULL RANK).

Allora

$$y_0 \in \text{Int}(f(\Omega))$$

(l'immagine contiene tutto un intorno di y_0)

Dim. Se $k = n$ è il teo. precedente

Supponiamo $k < n$ e poniamo $m = n - k$.

Indichiamo $x = (z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_k)$

Supponiamo wlog. che

$$Jf(x_0) = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} k \\ m \quad k \end{array} \quad \text{invertibile}$$

Considero

$$\Phi(x, y) = y - f(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_k)$$

$$\Phi: \Omega \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

e $J_{x_1, \dots, x_k}$ è invertibile in (x_0, y_0) . Allora per il teorema della funzione inversa posso ricavare

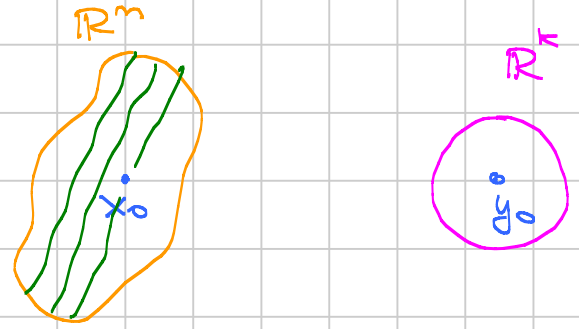
$$x_1, \dots, x_k$$

o funzione di

$$y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_m$$

Ora posso addirittura fissare $z_1 = \dots = z_m = 0$ e avere che ogni $(y_1, \dots, y_k)$ vicino a y_0 è immagine di un qualche x vicino ad x_0 con le prime m componenti nulle.

Ogni pto in arrivo vicino a y_0 ha come controimmagine un sottoinsieme di Ω di dimensione m .



Ulteriore generalizzazione

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ (k qualunque)

$x_0 \in \Omega$, $y_0 = f(x_0)$

(i) $f \in C^1$ in Ω

(ii) $Jf(x_0)$ ha rango J .

Allora moralmente l'immagine contiene una varietà di dimensione J passante per y_0

Detto meglio: esiste una funzione $g: B_\delta(0, \mathbb{R}^J) \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $Jg(0)$ di rango J tale che

$$\text{Im } g \subseteq \text{Im } f$$

