

Funzioni implicite in CODIMENSIONE k

$$1 \leq k < n$$

$$m := n - k$$

Prendiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ e sia data $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$. In componenti

$$f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = 0$$

$$f_2(\dots) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_k(\dots) = 0$$

k equazioni in n
incognite (x, y)
 m variabili $\uparrow$ k variabili $\uparrow$

Supponiamo che

- $f(0,0) = 0$
- $f(x,y)$ continua in Ω
- $J_y f(0,0)$ è invertibile (rang. k)
- $J_y f(x,y)$ continua in $(0,0)$

$$J_f = \begin{array}{|c|c|} \hline m & k \\ \hline J_x f & J_y f \\ \hline \end{array} \quad k$$

Allora esistono $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\varphi: B_\delta(0, \mathbb{R}^m) \rightarrow B_\varepsilon(0, \mathbb{R}^k)$ tale che

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in B_\delta(0, \mathbb{R}^m).$$

Inoltre

- ① φ è continua
- ② Se f è di classe C^1 , allora φ è di classe C^1 e

$$J\varphi(x) = -[J_y f(x, \varphi(x))]^{-1} [J_x f(x, \varphi(x))]$$

- ③ Se f è di classe C^k , allora φ è di classe C^k (bootstrap).

Enistrica per ② $f(x, \varphi(x)) = 0$ Calcolo le derivate

$$J_x f(x, \varphi(x)) + J_y f(x, \varphi(x)) J\varphi(x) = 0 \leadsto \text{ricavo } J\varphi(x)$$

Dim. Faccio 3 scelte

- Scelgo $m_0 > 0$ tale che $\| [J_y f(0,0)]^{-1} \| \leq \frac{1}{m_0}$
 $\uparrow$
norma di matrice
- Scelgo $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tali che

$$\| J_y f(x,y) - J_y f(0,0) \| \leq \frac{m_0}{2} \quad \forall (x,y) \in B_{\delta_0}(0, \mathbb{R}^m) \times B_{\varepsilon_0}(0, \mathbb{R}^k)$$

$\uparrow$
matrice

- Scelgo $\delta_1 > 0$ tale che

$$|f(x,0)| \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2} \quad \forall x \in B_{\delta_1}(0, \mathbb{R}^m)$$

$\uparrow$
norma di vettore
in $\mathbb{R}^k$

(Parentesi: la norma di una matrice $M = \{M_{ij}\}$ è $(\sum_{i,j} M_{ij}^2)^{1/2}$ e ha la proprietà che

$$|Mx| \leq \|M\| \cdot |x|$$

Poniamo $\Phi_{(x)}(y) = y - [J_y f(0,0)]^{-1} f(x,y)$

e spero che, quando $x \in \overline{B}_{\delta_1}(0, \mathbb{R}^m)$, la funzione $\Phi_{(x)}(y)$ abbia un pto fisso unico.

Devo dimostrare

(\phi 1) $\Phi_{(x)}: \overline{B}_{\varepsilon_0}(0, \mathbb{R}^k) \rightarrow \overline{B}_{\varepsilon_0}(0, \mathbb{R}^k)$ (metrico completo)

$\nwarrow$ chiusura importante $\searrow$

(\phi 2) $\Phi_{(x)}$ è $\frac{1}{2}$ -lip.

Come prima posso $\Phi_{(x)}(y) = [J_y f(0,0)]^{-1} \underbrace{\{ J_y f(0,0) y - f(x,y) \}}_{g(x,y)}$

Calcolo
da cui

$$J_y g(x, y) = J_y f(0, 0) - J_y f(x, y)$$

$$\|J_y g(x, y)\| = \| \dots \| \leq \frac{m_0}{2}$$

$\uparrow$
per ipotesi

Verifica di (Φ_2)

$$\begin{aligned} |\Phi_{(x)}(y_2) - \Phi_{(x)}(y_1)| &= |[J_y f(0, 0)]^{-1} (g(x, y_2) - g(x, y_1))| \\ &\leq \underbrace{\|[J_y f(0, 0)]^{-1}\|}_{\leq \frac{1}{m_0}} \cdot \underbrace{|g(x, y_2) - g(x, y_1)|}_{\leq |y_2 - y_1| \cdot \|J_y g(\dots, \dots)\|} \\ &\leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1| \leq \frac{m_0}{2} \end{aligned}$$

Verifica di (Φ_1) Devo dimostrare che $|\Phi_{(x)}(y)| \leq \varepsilon_0$ se $|y| \leq \varepsilon_0$.

Come prima $|\Phi_{(x)}(y)| \leq |\Phi_{(x)}(0)| + \underbrace{|\Phi_{(x)}(y) - \Phi_{(x)}(0)|}_{\leq \frac{1}{2}|y| \leq \frac{1}{2}\varepsilon_0}$

perché $\Phi_{(x)}$ è $\frac{1}{2}$ -lip

Resta da stimare

$$\begin{aligned} |\Phi_{(x)}(0)| &= |[J_y f(0, 0)]^{-1} f(x, 0)| \\ &\leq \underbrace{\|[J_y f(0, 0)]^{-1}\|}_{\leq \frac{1}{m_0}} \cdot \underbrace{|f(x, 0)|}_{\leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2}} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned}$$

Questo completa la dimostrazione.

Osservazione Il passaggio con Lagrange sulle matrici richiede qualche cautela in più perché vale solo componente per componente (i punti (ξ, η) dipendono dalla componente): si tratta di tenerne conto nella seconda scelta.

Abbiamo dimostrato esistenza e unicità di $\varphi(x)$ nell' intorno di ampiezza δ_1 su x ed ε_0 su y .

Come dimostro la continuità? Si ricicla le 2 dim. classiche
 $\rightarrow$ prendo nella seconda scelta ε piccolo quanto voglio e mi ritrovo un con. δ nella terza scelta
 $\rightarrow$ uso il lemma della sotto-sotto



Come dimostro la diff. in $(0,0)$?

Con lo sviluppo con Taylor Lagrange

$$0 = f(x, \varphi(x)) = J_x f(\xi, \eta) + J_y f(\xi, \eta) \varphi(x)$$

ricavo $\varphi(x)$ e passo al limite per $x \rightarrow 0$

Come sopra: (ξ, η) dipendono dalla componente, ma non importa !!!

Esercizio

$$\begin{cases} n^2 \arctan x + n \sin y + x = n \\ x^2 + nx + n^2 y + \cos(xy) = n + 5 \end{cases}$$

Per n abbastanza grande c'è soluzione (unica?) (x_n, y_n)

Devo verificare che

$$\begin{cases} f \begin{cases} \arctan x + z \sin y + z^2 x - z = 0 \\ z^2 x^2 + z x + y + z^2 \cos(xy) - z - 5z^2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \rightarrow \text{Det} \neq 0 \text{ in } (0,0,0)$$