

Nuova dimostrazione del te. funzioni implicite con $n=2$ e $k=1$.

Notazioni e ipotesi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \Omega$

Supponiamo

- $f(x_0, y_0) = 0$
- $f_y(x, y)$ esiste ed è continua in Ω
- $f(x, y)$ continua in Ω
- $f_y(x_0, y_0) > 0$

Allora esistono $\delta > 0$ ed $\varepsilon > 0$ e $\varphi: \dots$ tali che $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Dim. Faccio 3 scelte

- Scelgo $m_0 > 0$ tale che

$$f_y(0, 0) \geq m_0 > 0$$

- Scelgo $\delta_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$|f_y(x, y) - f_y(0, 0)| \leq \frac{m_0}{2} \quad \forall (x, y) \in [-\delta_0, +\delta_0] \times [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$$

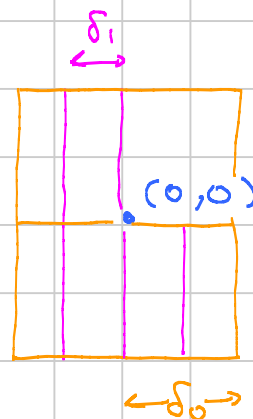
Questo è possibile per l'(unif) cont. di f_y

- Scelgo $\delta_1 > 0$ tale che

$$|f(x, 0)| \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2} \quad \forall x \in [-\delta_1, +\delta_1]$$

Per ogni $x \in [-\delta_1, +\delta_1]$ voglio trovare $y \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$ t.c.

$$f(x, y) = 0.$$



Idea è di considerare la funzione

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{parametro}}}{\Phi_{\alpha}}(y) := y - \frac{f(x, y)}{f_y(0, 0)}$$

Supponiamo che $\Phi_{\alpha}(y)$ abbia un p.to fisso $\bar{y}$. Allora $f(x, \bar{y}) = 0$ e quindi $\bar{y}$ è quello che volevo.

Per dimostrare che ha un p.to fisso (unico) uso il teorema delle contrazioni nello spazio metrico $[-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$.

Devo fare 2 verifiche

(Φ_1) $\Phi_{\alpha} : [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0] \rightarrow [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$, quindi manda lo spazio in sé.

(Φ_2) Φ_{α} è $\frac{1}{2}$ -Lipschitz, dunque è una contrazione.

Per fare le verifiche riscrivo

$$\Phi_{\alpha}(y) = \frac{f_y(0, 0)y - f(x, y)}{f_y(0, 0)} = g(x, y)$$

Proprietà di $g(x, y)$. È derivabile parzialmente rispetto ad y e

$$|g_y(x, y)| = |f_y(0, 0) - f_y(x, y)| \rightsquigarrow \text{piccolo se } (x, y) \text{ è vicino a } (0, 0)$$

Inoltre

$$|g(x, y)| \leq |g(x, 0)| + |g(x, y) - g(x, 0)|$$

$$= |f(x, 0)| + |y| \cdot |g_y(x, y)|$$

$\uparrow$
piccolo se
 $x \sim 0$

$\uparrow$
piccolo
se $|y|$ piccolo

$\uparrow$
piccolo se
 g_y è piccolo.

Scriviamo per bene le piccolezze:

$$|g_y(x, y)| = |f_y(0,0) - f_y(x, y)| \leq \frac{m_0}{2} \quad \text{nel rettangolo}$$

$$|g(x, y)| \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2} + \varepsilon_0 \frac{m_0}{2} = m_0 \varepsilon_0$$

Verifica di (Φ_1) . Mi serve che $\Phi(x) \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$, cioè

$$|\Phi(x)(y)| \leq \varepsilon_0. \quad \text{Ma}$$

$$|\Phi(x)(y)| = \frac{|g(x, y)|}{|f_y(x_0, y_0)|} \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{m_0} = \varepsilon_0$$

Verifica di (Φ_2) :

$$\begin{aligned} |\Phi(x)(y_2) - \Phi(x)(y_1)| &= \frac{|g(x, y_2) - g(x, y_1)|}{|f_y(0, 0)|} \\ &= \frac{|y_2 - y_1| \cdot |g_y(x, \eta)|}{\underbrace{|f_y(0, 0)|}_{\geq m_0}} \leq \frac{m_0}{2} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1|$$

Esempio 1 Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo il problema

$$n^2 \sin x + e^x - \arctan x + n x^2 = 1$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il problema ammette una soluzione x_n e vedere il limite di x_n .

$$\text{Divido per } n^2: \quad \sin x + \frac{1}{n^2} e^x - \frac{1}{n^2} \arctan x + \frac{1}{n} x^2 - \frac{1}{n^2} = 0$$

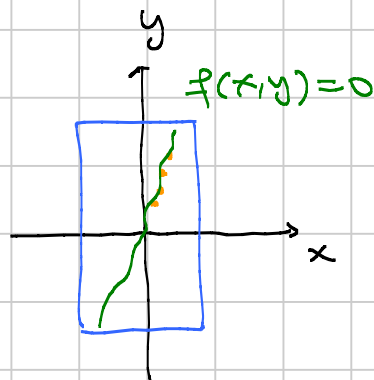
Pongo $y = \frac{1}{n}$: $\underbrace{\sin x + y^2 e^x - y^2 \arctan x + y x^2 - y^2}_{f(x,y)} = 0$

Così diventa un problema di funzioni implicite vicino a $(0,0)$
 Voglio ricavare x in funzione di y . Basta verificare che

$f_x(0,0) \neq 0$ Ok perché $f_x(0,0) = 1$

$x = \varphi(y)$ $\varphi'(y) = - \frac{f_y(\varphi(y), y)}{f_x(\varphi(y), y)}$

$\varphi'(0) = - \frac{0}{1} = 0$



Quindi $\varphi(y) = o(y) \leadsto x_n = o(\frac{1}{n})$

Se volessi ordine di infinitesimo e parte principale dovrei sviluppare $\varphi(y)$ e trovare il 1° termine non nullo.

Idea euristica della dimostrazione con pto fisso.
 Voglio che

$f(x, \varphi(x)) = 0$

o detto meglio $f(x, y) = 0$. Sviluppo:

$f(x, y) = f(0,0) + y f_y(x,0) + r(x,y)$ (=0)

Se fosse così $y = - \frac{r(x,y)}{f_y(x,0)}$

Ignorando che $f(x,y)$ posso sempre avere

$r(x,y) = f(x,y) - y f_y(x,0)$

e quindi $y = + \frac{y f_y(x,0) - f(x,y)}{f_y(x,0)} = y - \underbrace{\frac{f(x,y)}{f_y(x,0)}}_{\phi(y)}$