

Oss. Cosa succede nel Dini  $m=2$  e  $k=1$  se non sono soddisfatte le ipotesi, in particolare se  $f_y(x_0, y_0) = 0$ .  
Tante possibilità

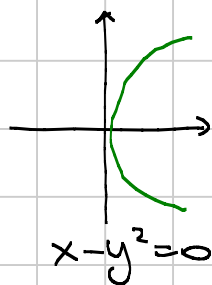
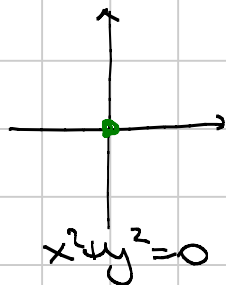
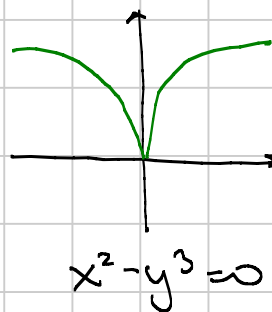
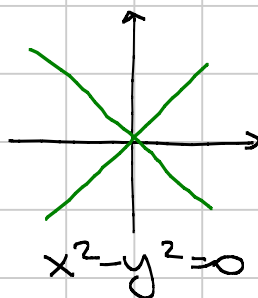


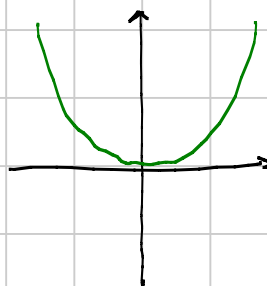
grafico dell'altra  
parte



p.to solo ☹️



Può anche non succedere  
nulla



Caso m generico,  $k=1$  Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  e sia  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   
continua in  $\Omega$

$f_{x_n}(x, y) \neq 0$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$  dove  $f(x_0, y_0) = 0$

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_{n-1})}_x, \underbrace{x_n}_y = (x, y)$$

Allora esistono  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\varphi: \overline{B}(x_0, \delta) \rightarrow [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$   
continua tale che

$\forall n [\overline{B}(x_0, \delta) \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]] = \text{grafico di } \varphi$

Se  $f$  è  $C^k$ , allora  $\varphi$  è  $C^k$  e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

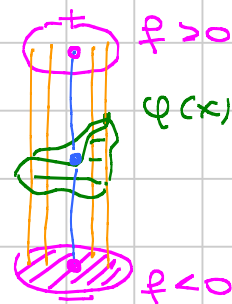
$i=1, \dots, n-1$

prime  $n-1$  variabili

Dom. Stessa del caso precedente

Continuità e regolarità  
come prima.

$f$  passa da  $<0$  a  $>0 \rightarrow$   
ed è monotona  
 $\Rightarrow$  si annulla almeno  
una volta, anzi  
una sola  
quello è  $\varphi(x)$



Esempio 1  $f(x,y) = \arctan y + xy^3 + \sin x$   $(x_0, y_0) = (0,0)$

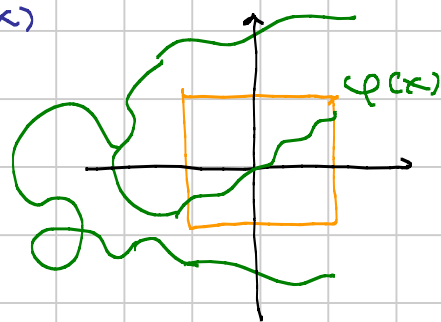
Dimostrare che definisce una funzione

$$y = \varphi(x)$$

vicino all'origine, e calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine 4

Step 1  $f(0,0) = 0$  e  $f_y(0,0) = 1$  e  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

Quindi localmente  $\forall$  è il grafico di  $\varphi(x)$



Step 2  $\varphi'(x) = - \frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$

$$\varphi'(0) = - \frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = - \frac{1}{1} = -1$$

Calcoliamo  $\varphi''(0)$

$$\varphi''(x) = - \frac{[f_{xx}(\cdot) + f_{xy}(\cdot)\varphi']f_y(\cdot) - f_x(\cdot)[f_{yx}(\cdot) + f_{yy}(\cdot)\varphi']}{[f_y(x, \varphi(x))]^2}$$

Tutte le derivate si calcolano e facilmente.

$\begin{matrix} -1 \\ \uparrow \\ 0 \end{matrix}$   
sono 0 le deriv.  
secondo di  $f$

Step 3  $\varphi$  è  $C^4$ , quindi il Taylor di ordine 4 esiste

$$\varphi(x) = -x + \underset{0}{a}x^2 + bx^3 + cx^4 + o(x^4)$$

So che deve essere  $f(x, \varphi(x)) = 0$ , quindi

$$\arctan \varphi(x) + x \varphi^3(x) + \sin x = 0$$

$$\arctan(-x + ax^2 + bx^3 + cx^4) + x \left( \quad \right)^3 + x - \frac{1}{6}x^3 = O(x^4)$$

$$-\cancel{x} + ax^2 + bx^3 + cx^4 - \frac{1}{3}(-x^3 + 3ax^4) - x^4 + \cancel{x} - \frac{1}{6}x^3 = O(x^4)$$

$\uparrow$   
 $=0$

$\leadsto$  trovo c e d

Domanda globale: è vero che per ogni  $x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}$  t.c.  
 $f(x, y) = 0$ .

Domanda più semplice:  $V$  è limitato?

No Per ogni  $x > 0$  sappiamo che  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(x, y) = -\infty$$

Si dimostra che  $\forall x > 0 \exists! y \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x, y) = 0$

— 0 — 0 —

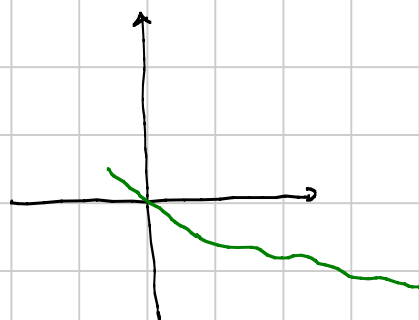
Meta-strategie.

① Come dimostro che  $V$  è regolare ovunque?

Spero che il sistema

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

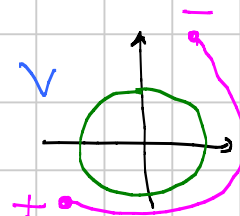
non abbia soluzioni.



② Come decido se  $V$  è limitato oppure no?

$\rightarrow$  se so che  $\liminf_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) > 0$ , allora  $V$  è limitato  
 (o  $\limsup < +\infty$ )

$\rightarrow$  se so che  $\liminf f < 0$  e  $\limsup > 0$ , allora  $V$  non è limitato



③ Come decido se  $V$  è connesso?

→ Difficile !!

È più facile vedere se non è connesso



Esempio 2  $\arctan(xz) + \sin z + \cos(yz) - 1 = 0$

Definisco una sup. vicino all'origine  $z = \varphi(x, y)$  ( $\varphi_z(0, 0, 0) = 1$ )

→  $V$  è limitato? NO ( $x=y=0 \leadsto$  lim inf e lim sup sono  $\pm 1$ )

$\varphi$  è convessa / concava? Basta calcolare  $H\varphi(0, 0)$ .

Impongo  $\varphi(x, y) = ax + by + cx^2 + 2dxy + ey^2$   
e sostituisco di ordine 2

$$\cancel{\arctan}(x \cancel{(ax+by)}) + \cancel{\sin}(\cancel{ax+by} + cx^2 + 2dxy + ey^2) + \cancel{1-1} = 0$$

partiamo  
da

→  $a = b = 0$

→  $c = d = e = 0 \rightarrow H\varphi(0, 0)$  è nullo, quindi non possiamo dire nulla.

È chiaro che non è limitato, ma non sappiamo se è connesso o se  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \exists z \in \mathbb{R} \text{ t.c. } f(x, y, z) = 0$ .

Esercizio  $f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

$Hf(x_0, y_0)$  ha  $\text{Det} < 0 \Rightarrow$  localmente è così

